集合幂级数在子图计数问题上的应用

杭州第二中学 陈昕阳

2025.5.16

前言

相信大家都发现，要学好 OI，学好集合幂级数，尤其是学会用集合幂级数做一些子图计数问题很重要。

今天先介绍集合幂级数，然后分别考察如何用集合幂级数解决子图的（无向）连通性限制、（有向）强连通性、可达性、无环限制、（双连通性）边双连通性限制。

今天的讲课比较零基础，相信大家都能听懂！不过如果觉得讲的内容太无聊了（或者早就会了），后三部分均有一些写了题面但由于时间原因不详细介绍的习题，大家可以自行思考。

集合幂级数是什么

先给出一个形式化的定义：

设全集 $U=\{1,2...n\}$，U 上的集合幂级数 f 是一个 $2^U\to R$ 的映射。2^U 表示 U 的幂集即所有 U 的所有子集构成的集合。也就是说，一个 U 上的集合幂级数相当于给所有 U 的子集指定了一个 R 内的权重，其中 R 是交换环。

交换环是具有加法、乘法，所有元素有加法逆元，且加法、乘法具有结合律、交换律，乘法对交换具有分配律的代数系统，注意不对求逆做出保证。如果不理解交换环，可以简单理解为是整数环，即系数都是整数（但下面会有 R 是多项式环的情形）。

记 f_S 表示 f 将 S 映到的值，这只是一个记号。

现在我们已经指定研究的对象是 $2^U\to R$ 的所有映射，但如果不能在上面进行运算，也什么都做不了。

集合幂级数的运算

对于两个 U 上的集合幂级数 f,g，定义它们的加法 $f+g$ 也是 $2^U\to\mathbb{R}$ 的映射，满足 $(f+g)_S=f_S+g_S$

定义它们的乘法（无交并）$f\times g$ 是 $2^U\to R$ 的映射，满足 $(f\times g)_S=\sum\limits_{T\subseteq S}f_Tg_{S-T}$。

定义它们的集合并乘法（OR 卷积，允许有交）$f*g$ 是 $2^U\to R$ 的映射，满足 $(f*g)_S=\sum\limits_{L,R\subseteq U,L\cup R=S}f_Lg_R$。

由于 R 是一个交换环，其上加法、乘法的结合律、交换律，乘法对加法的分配律保证了集合幂级数的加法、乘法（两种乘法都是）也具有结合律、交换律，乘法对加法分配。当然集合幂级数也有加法逆元，即可以进行减法。

简单来说，集合幂级数的运算，看上去对的性质都是对的。

运算的计算方法

显然存储一个集合幂级数相当于存储 2^n 个 R 内的值。加法就是逐项相加，进行 $\Theta(2^n)$ 次 R 上的加法。

接下来考虑集合并乘法如何计算，即熟知的“位运算 OR 卷积”。对于一个集合幂级数 f，记 $\mathrm{FMT}(f)$ 也是一个集合幂级数，满足 $\mathrm{FMT}(f)_S = \sum_{T \subseteq S} f_T$。由熟知的“高维前缀和”进行 $\Theta(2^n n)$ 次 R 上的加法即可从 f 推得 $\mathrm{FMT}(f)$；倒过来做这个过程进行“高维差分”也是进行 $\Theta(2^n n)$ 次 R 上的减法即可从 $\mathrm{FMT}(f)$ 推回 f。

还不难发现 $\mathrm{FMT}(A+B) = \mathrm{FMT}(A) + \mathrm{FMT}(B)$，下面会用到这一性质。

运算的计算方法

观察 $\mathrm{FMT}(f*g)_S=\sum_{L,R\subseteq U,L\cup R\subseteq S} f_L g_R$，条件可以改写为 $L\subseteq S$ 且 $R\subseteq S$，由 R 上的乘法分配律可得 $\mathrm{FMT}(f*g)_S=(\sum_{L\subseteq S} f_L)(\sum_{R\subseteq S} g_R)$，即 $\mathrm{FMT}(f*g)_S=\mathrm{FMT}(f)_S\mathrm{FMT}(g)_S$。

于是集合并乘法进行 $\Theta(2^n n)$ 次 R 上的加法，$\Theta(2^n)$ 次 R 上的乘法即可完成。

事实上，不难推广得到以下结论：对 k 个集合幂级数 $f_1\sim f_k$，$\mathrm{FMT}(f_1*f_2*\ldots*f_k)_S=\prod_{i=1}^{k}\mathrm{FMT}(f_i)_S$。

运算的计算方法

计算两个集合幂级数的乘法则稍微困难一些，注意到 $(f\times g)_S=\sum_{L,R\subseteq U,L\cap R=\varnothing,L\cup R=S} f_L g_R$，相比集合并乘法多了 $L\cap R=\varnothing$ 的限制，但在 $L\cup R=S$ 的前提下，这个限制充要于 $|L|+|R|=|S|$。

这启发我们取环 $R[x]$，即所有系数在 R 内的关于 x 的多项式组成的环，然后将定义在 U 上，系数在 $R[x]$ 内的集合幂级数 $f'_S=f_S x^{|S|}$ 和 $g'_S=g_S x^{|S|}$ 做集合并卷积，那么 $(f\times g)_S=[x^{|S|}](f'*g')_S$。

这被称为“占位多项式”，可以理解为原来集合幂级数每一项的系数都是一个具体的整数，现在增加了关于集合大小的限制，可以用 x 一元记录这一关于集合大小的信息，而多项式的卷积恰好描述了集合大小的加和，与我们的目标是相符的。

运算的计算方法

分析上述算法的时间复杂度。注意到定义在 U 上，系数在交换环 R' 内的两个集合幂级数做集合并乘法需要 $\Theta(2^n n)$ 次 R' 上加法操作，$\Theta(2^n)$ 次 R' 上乘法操作。该算法中 R' 是系数在 R 内的关于 x 的多项式，且可以注意到多项式次数总不超过 n，所以一次 R' 上加法操作相当于 $\Theta(n)$ 次 R 上加法操作，一次 R' 上乘法操作相当于 $\Theta(n^2)$ 次 R 上的加法、乘法操作。

于是两个集合幂级数的乘法可以在 $\Theta(2^n n^2)$ 次 R 上的加法、乘法操作内完成。

集合幂级数的复合

如果随便打开一篇介绍集合幂级数的文章，现在应该要开始讲集合幂级数的求逆/exp/ln 了，但实际上并没有必要，这些无非都是复合的特例，所以我们直接介绍集合幂级数的复合。

对于一个 $f_0 = 0$ 的集合幂级数 f 与一个给定的多项式 h，定义 $h(f)$ 也是一个集合幂级数，满足 $h(f) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i f^i$，$f^i$ 当然就表示 i 个 f 相乘，而 h_i 是 h 的 $[x^i]$ 项系数。

虽然定义中 $h(f)$ 是无穷求和的形式，但注意到当 $f_0 = 0$ 时实际上 $i > n$ 时 f^i 每项系数均为 0，所以限定 $i \le n$ 结果不变。

集合幂级数复合的计算方法

回顾集合幂级数的乘法，我们说计算 $f\times g$ 只需算出 $f' * g'$，f', g' 的定义与上面一致。暂且记集合并乘法意义下的 i 次方为 $(f')^{(*)i}$，按照上面的逻辑计算 f^i 当然只需算出 $(f')^{(*)i}$，即相当于要算 $\sum\limits_{i=0}^{n} h_i(f')^{(*)i}$。

当然，注意到虽然 $\sum\limits_{i=0}^{n} h_i(f')^{(*)i}$ 的某一项系数可能是达到 n^2 次的 R 上的多项式，由于最终提取的系数不超过 n 次，可以将更高次的项舍弃。

利用 $\mathrm{FMT}(f_1 * f_2 * \ldots * f_k)_S = \prod\limits_{i=1}^{k} \mathrm{FMT}(f_i)_S$，以及 $\mathrm{FMT}(A+B) = \mathrm{FMT}(A) + \mathrm{FMT}(B)$，不难发现有 $\mathrm{FMT}(\sum\limits_{i=0}^{n} h_i(f')^{(*)i})_S = \sum\limits_{i=0}^{n} h_i(\mathrm{FMT}(f')_S)^i$。

集合幂级数复合的计算方法

对 f 做子集和变换/逆变换当然还是只需要进行 $\Theta(2^n n^2)$ 次 R 上的加法操作，但注意到其实需要计算 $\Theta(2^n)$ 次 R 上的多项式复合，求复合结果的前 n 项系数，而 R 上的多项式复合最粗糙的做法需要 $\Theta(n^3)$ 次 R 上的加法、乘法操作。

当然我们现在已经知道若取 $R = \mathbb{F}_{998244353}$，即系数可以认为是模 998244353 意义下的整数，R 上的多项式复合求前 n 项系数可以在 $\Theta(n \log^2 n)$ 时间内解决，事实上多项式复合的传统做法也已经做到 $\Theta((n \log n)^{1.5})$，均是 $O(n^2)$ 的。所以可以认为这里介绍计算集合幂级数复合的算法已经是 $\Theta(2^n n^2)$ 的。

集合幂级数复合的一些讨论

当然事实上上述算法并不实用，不过在很多情况下，多项式 h 实际上非常特殊，比如 h 取 $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$ 或 $\ln(1+x)=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{x^i}{i}$，对任意多项式 p 计算 $h(p)$ 在 $R=\mathbb{F}_{998244353}$ 时都存在 $\Theta(n^2)$ 的简单做法，这纯粹是多项式技巧，就不展开介绍了。

一个注记是，不使用多项式复合的快速算法，不需对 R 做出限制也可以使用 $\Theta(2^n n^2)$ 次 R 上加法、乘法运算计算集合幂级数的复合。沿着这一思路拓展，还可以做到 $\Theta(2^n\,\mathrm{M}(n))$ 时间计算集合幂级数的复合，其中 $\mathrm{M}(n)$ 表示在 R 上进行多项式乘法消耗的时间复杂度。

如果你对这些内容感兴趣，建议查阅 EI 的集训队论文。

约定

方便起见，接下来直接认为 $R = \mathbb{F}_{998244353}$。

若集合幂级数 f, g 其中 f 常数项为 0，满足 $h = e^x$ 时 $g = h(f)$，直接记 $g = \exp f$。

若集合幂级数 f, g 其中 f 常数项为 1，满足 $h = \ln(1 + x)$ 时 $g = h(f - 1)$，记 $g = \ln f$。

可以验证，此时对任意常数项为 0 的集合幂级数 f，满足 $\ln(\exp f) = f$，与常规的认识相符。

连通性限制

接下来我们来考虑一些连通性限制，不过这个名字可能未必准确。本节其实主要想介绍一些“已知要求连通的信息推及不要求连通的信息”及其逆过程的技巧。

最重要的是要知道子集 exp/ln 的组合意义，如果一个结构可以分裂成若干彼此独立的子结构（无序），往往转写成计数的形式会对应子集 exp/ln 。

子集 exp/ln 的组合意义

众所周知形式幂级数的 exp/ln 有所谓“组合意义”，集合幂级数当然也有。

对于集合幂级数 f, g，满足 $g = \exp f$，也就是 $f = \ln g$。这一关系式的组合意义是：将 f_S 视为划分出一个大小为 S 的子集的权值，那么 g_S 表示对 S 集合的所有划分方案的权值和，一种划分方案的权值定义为划分出的所有子集的权值之积。

证明可以考虑 $g_S = (\exp f)_S = (\sum_{i \ge 0} \frac{f^i}{i!})_S$，$(f^i)_S$ 相当于对所有有序取出 i 个子集，无交并起来恰好得到 S 的方案求和，但集合划分应是无序的于是除以 $i!$。

据此可以直接解决许多有关（无向）连通性限制的问题，比如接下来的两道例题。

数连通子图

1. 给定 n 个点 m 条边的简单无向图 $G=(V,E)$，求有多少边集 E' 满足 $E'\subseteq E$ 且 (V,E') 是连通图。答案对 998244353 取模。
2. $1\le n\le 20, 0\le m\le \binom{n}{2}$。

source：经典问题。

数连通子图

下面称对于 $G=(V,E)$，其边子图是所有 (V,E') 满足 $E'\subseteq E$。

设 f_S 只考虑点集 S 的导出子图（点集是 S，边集是 G 中所有两端在 S 内的边）有多少边子图是连通的。

设 $g=\exp f$，考虑 g 的组合意义：g_S 表示对 S 的所有划分方案的权值和，划分方案的权值仍然是每个划分出来的子集的权值之积，而一个子集的权值是其导出子图的连通边子图数量。可以发现 g_S 恰好考虑了所有点集 S 导出子图的边子图（不要求连通）各一次。

于是设 cnt_S 为 S 导出子图边数，那么 $g_S=2^{cnt_S}$。接下来用 $f=\ln g$ 反推出 f 即可，时间复杂度 $\Theta(2^n n^2)$。

数连通二分子图

1. 给定 n 个点 m 条边的简单无向图 $G=(V,E)$，求有多少边集 E' 满足 $E'\subseteq E$ 且 (V,E') 是连通二分图。答案对 998244353 取模。
2. $1\le n\le 20, 0\le m\le \binom{n}{2}$。

source： ARC105F 是数据范围稍小的版本。

数连通二分子图

二分图是存在黑白染色的图，一个简单的想法是枚举 $S \subseteq U$ 染为白色，$U - S$ 染为黑色，符合这种染色方案的图必须满足 S 内部无连边，$U - S$ 内部也无连边，而两个点集之间可以随意连边。于是设 $cross(S, T)$ 表示对于 $S \cap T = \varnothing$ 的 S, T 两个点集，跨过这两个点集的边数，符合这种染色方案的原图的子图恰有 $2^{cross(S,T)}$ 张。

这样算当然忽略了必须连通的限制，看上去像是原图的二分子图数量。但其实也不对，因为一张二分图的黑白染色方案不止一种。具体来说，假设其有 c 个弱连通块，其黑白染色方案恰有 2^c 种，于是一张有 c 个弱连通块的原图的二分子图按照上面的算法恰被计入了 2^c 次。

数连通二分子图

设 f, g 为两个集合幂级数，f_S 为 S 导出子图的连通二分边子图数量 $\times 2$，g_S 为 S 导出子图的二分边子图权值和，其中一张二分图的权值定义为 $2^{\text{其弱连通块数}}$，那么由组合意义不难看出 $g = \exp f$。

上面的算法相当于求了 g_U 一项，用同样的方法不考虑时间复杂度当然总能算出 g 的所有项，然后根据 $f = \ln g$ 算出 f，希望求的答案当然就是 $\frac{1}{2} f_U$。

最后考虑如何高效求 g 的所有项，设 sum_S 为 S 导出子图边数，注意到 $g_S = \sum_{T \subseteq S} 2^{cross(T, S-T)} = \sum_{T \subseteq S} 2^{sum_S - sum_T - sum_{S-T}} = 2^{sum_S} \sum_{T \in S} 2^{-sum_T} 2^{-sum_{S-T}}$，是子集卷积的形式。

于是先子集卷积求出 g 所有系数，再做一次 $\ln$ 求出 f 即可，两步时间复杂度均为 $\Theta(2^n n^2)$。

本节习题一

1. 对于给定的源点 s，汇点 t，称一张有向图为杏仁，当且仅当这张有向图的边集可以被划分为若干条从 s 到 t 的路径，且这组划分满足所有路径的点集仅在 s,t 两点相交（设划分出 k 条路径的点集分别为 $S_1 \sim S_k$，应满足 $\forall i \neq j, S_i \cap S_j = \{s,t\}$）
2. 给定 n 个点 m 条边的有向图 $G=(V,E)$ 以及固定的源汇点 s,t，回答 q 次询问：
3. 每次询问给出点 u，询问 G 有多少杏仁子图满足其包含边 $s \to u$，答案对 998244353 取模。
4. 对于 $G=(V,E)$，称 $G'=(V',E')$ 是 G 的杏仁子图，当且仅当 G' 是杏仁，且 $V' \subseteq V, E' \subseteq E$，$V'$ 内无孤立点。
5. $2 \le n \le 22, 0 \le q \le n$

source： QOJ6954 CTT2020 D4T1 杏仁。

本节习题二

1. 给定 n 个点带边权的无向完全图 $G=(V,E)$。
2. 定义其一个边子图 (V,E') 是好的，当且仅当其首先**连通**。并且 (V,E') 的所有简单环（不经过重复点的环）的交不为空。特别地，如果 (V,E') 无环也认为满足简单环交集的条件。
3. 定义一个边子图的权值为其所有边的边权之积，求 G 所有好的边子图的权值和，答案对 10^9+7 取模。
4. $1\leq n\leq 16$。

source： QOJ6954 Almost Acyclic。

本节习题三

1. 给定 n 个点 m 条边的无向图 $G=(V,E)$ 和常数 c。
2. 定义其一个边子图 (V,E') 是一组匹配，当且仅当其中所有点度数 ≤ 1，定义一组匹配的权值为 $c^{|E|}$。
3. 求 G 上所有匹配的权值和对 10^9+7 取模的结果。
4. $1\leq n\leq 36$。

source：QOJ2068 Fast as Ryser。

bonus：$n\leq 40$，且 $\forall 0\leq k\leq n$，计算 $|E|=k$ 的匹配数量(比原题意强)。

bonus source：Atcoder Xmas contest 2022 F Fast as Fast as Ryser

强连通性、可达性、无环限制

如果要研究的对象是有向图，常见的限制会包含强连通性、可达性、无环限制（即要求是 DAG），可能还会包含这些限制的复合（强连通分量之间有一些可达性限制）。

先从无环限制开始，这涉及最基础的如何唯一地刻画一张有向图。

刻画 DAG

方便起见，先来考虑如何刻画一张 DAG。DAG 有很明显的递归到子问题的结构：每次删去一个没有出度的点直到删空即可。

但这种方法显然是不优的：过程不唯一。精确一点地说对应某一张 DAG 的上述过程数，是其拓扑序个数，不过其实也不重要。为了便于计数，我们当然希望对 DAG 构造一个唯一的递归到子问题的过程，这样只需要对不同的过程计数即可。

解决方案是明显的：每次同时删去所有没有出度的点，直到删空。

但实践这个想法可能会遇到一些困难，来看一下一道例题。

数 DAG 定向

1. 给定 n 个点 m 条边的简单无向图 $G=(V,E)$。现在要根据无向图 G 构造一张有向图 $G'=(V,E')$，构造方式是对所有 $(u,v)\in E$，向 E' 中加入有向边 $u\to v$ 或有向边 $v\to u$（两者之一），E' 不包含额外的边。求是一张 DAG 的 G' 数量，答案对 998244353 取模。
2. $1\le n\le 20, 0\le m\le \binom{n}{2}$。

source： CF1193A，题意和数据范围略有修改。

数 DAG 定向

设 dp_S 为对于 S 的导出子图，上述问题的答案。按照删去所有无出度点的想法，似乎转移应该是枚举 $T \subseteq S$ 且 $T \neq \varnothing$，认为 T 恰好是所有无出度点，然后计算符合条件的定向数量。

那么当然 T 导出子图应当没有边，否则无论怎么定向都不合法。而 $S-T$ 与 T 两部分之间的边，当然应当是从 $S-T$ 只向 T，而 $S-T$ 内部的边似乎是一个子问题，对应方案数 dp_{S-T}？

当然这并不对，这样转移虽然保证了 T 内的点均是无出度点，但并没有保证 $S-T$ 内部的点都有出度！直接据此修补上述做法可能并不好办，可能要记录 $S-T$ 这一子问题内部有哪些点是无出度的，这样状态会达到 3^n 级别，转移复杂度更高，不可接受。

数 DAG 定向

考虑我们现在的做法实际上在计数什么：假设对于一种定向 $G' = (V, E')$，无出度点集合构成 S，上面的计数方法枚举了所有从 V 中删去无出度点集 T 的方案，满足 $T \subseteq S$ 且 $T \neq \varnothing$，即方案数共有 $2^{|S|} - 1$ 种，而我们希望方案数恰是 1 种。

这一段分析是固定一种定向考虑其被计数多少次而言的，且我们假定在做完第一步删去点集 T 的操作后，接下来得到的点集为 $V - T$ 的 DAG 在我们的计数过程中恰好被计入了 1 次（可以视作一种归纳假设）。

凑一下容斥系数，发现如果给删去点集 T 的方案赋容斥系数 $(-1)^{|T|+1}$，那么 $\sum_{T \subseteq S, T \neq \varnothing} (-1)^{|T|+1} = \sum_{i=1}^{|S|} \binom{|S|}{i} (-1)^{i+1} = 1$（关于组合数的一些基本结论），在加权意义下被计入 1 次，是符合目标的。

数 DAG 定向

对这段分析还可以再说两句：要理解这些容斥做法，往往可以固定一种方案，考虑其被计入几次。如果合法方案均恰好被（带权，下同）计入 1 次，非法方案均恰好被计入 0 次，显然就是符合目标的。

我们归纳证明上述做法的正确性：假设对所有 $|V| < n$ 的图 $G' = (V, E')$，若 G' 是 DAG，上述做法计入其 1 次，若其不是 DAG，上述做法计入其 0 次，现在归纳证明对于 $|V| = n$ 的图也满足这一性质。

对于 DAG $G' = (V, E')$，其任意删去无出度点集 T 仍然得到 DAG，且大小 $< n$，所以根据归纳假设删完的图被计入恰好 1 次，而上一页已经证明了带上 $(-1)^{|T|+1}$ 的容斥系数可以保证在此前提下，G' 也被计入恰好 1 次。

数 DAG 定向

而对于非 DAG，其要么直接 $S=\varnothing$ 从而删无可删，即使其存在删去无出度点的方案，根据归纳假设删完得到的图仍然被计入 0 次，所以非 DAG 均被计入 0 次。

归纳边界可以选 $n=0$，即设 $dp_0=1$，此时空图是 DAG 被计入 1 次，边界也是正确的。

这个技巧被称为“DAG 容斥”。

数 DAG 定向

直接实现上述做法时间复杂度为 $\Theta(3^n)$。仔细分析不难发现过程可以视作从 $S=\varnothing$ 开始每次拼上一个独立集 T，带容斥系数 $(-1)^{|T|+1}$。

设 f 为集合幂级数，若 S 导出子图有边则 $f_S=0$，否则 $f_S=(-1)^{|S|+1}$，特别地 $f_0=0$。那么设 $h=1+x+x^2+\ldots=\dfrac{1}{1-x}$，相当于要求解集合幂级数的复合 $h(f)$ 的 $[x^U]$ 一项系数。

其实这是比较 well-known 的所谓子集求逆，不过照例视作复合的特例，只是满足计算多项式复合较为方便的外层多项式即可。时间复杂度 $\Theta(2^n n^2)$。

DAG 容斥介绍的比较详细，这是因为它是数强连通子图的基础。在足够理解 DAG 容斥之后，数强连通子图的过程是非常类似的。

数强连通子图

1. 给定 n 个点 m 条边的简单有向图 $G=(V,E)$（但有可能既有 $u\to v$ 的边也有 $v\to u$ 的边）。求有多少 G 的边子图 $G'=(V,E')$ 满足 $E'\subseteq E$ 且 G' 强连通，答案对 10^9+7 取模。
2. $1\le n\le 15, 0\le m\le n(n-1)$。

source： QOJ7 CTT2014 D1T2 主旋律。

数强连通子图

考虑一张一般有向图的结构：强连通缩点后，各个强连通分量及之间的连边构成一张 DAG。

一张一般有向图要么强连通，要么由多个更小的强连通分量及之间的连边组成。看上去很废话，但提供了一个容斥的思路：用 2^m 减掉后一种情况方案数。

假设后一种情况已经确定了各个强连通分量的点集划分，那么各个强连通分量内部的连边显然是独立的，而之间的连边相当于数 DAG 子图。

之前的做法是对无出度点做容斥，现在应对无出度强连通分量做容斥。设 ans_S 为 S 导出子图的强连通子图数量，cof_S 为将 S 划分为若干无出度强连通分量的所有方案的带权求和，权重当然是 $(-1)^{sz+1}$，其中 sz 是划分出的强连通分量数量。

数强连通子图

对于 $S\cap T=\varnothing$，记 $cross(S,T)$ 为有多少 $(u,v)\in E$ 满足 $u\in S,v\in T$，即原图有多少从 S 集合指向 T 集合的边。

若 S 导出子图由多个强连通分量组成，枚举无出度强连通分量点集构成 T，方案数是 $2^{cross(S-T,S-T)+cross(S-T,T)}cof_T$。沿用之前的分析 $\sum_{\varnothing\subsetneq T\subseteq S}2^{cross(S-T,S)}cof_T=2^{cross(S,S)}$，只需考虑确实所有 S 导出子图在两边均被计入一次。

$cof_S=2^{cross(S,S)}-\sum_{\varnothing\subsetneq T\subsetneq S}2^{cross(S-T,S)}cof_T$，可以解出 cof_S。

cof 的定义显然是一个集合划分的形式，事实上 $cof=-\exp -ans$，这里 $-ans$ 指给 ans 除常数项外每项乘 -1 得到的集合幂级数。

数强连通子图

考虑 $cof_S = \sum_{T\subseteq S, lowbit(S)\in T} cof_{S-T}(-ans_T)$ 这一关系。考虑集合划分每次去掉包含 lowbit 的一个划分项，即可得到此关系式。改写一下 $ans_S = cof_S + \sum_{T\subsetneq S, lowbit(S)\in T} cof_{S-T}ans_T$，可以解出 ans_S。

在合适的预处理后查询 $cross(S,T)$ 可以认为是 $\Theta(1)$ 的，根据这两条关系式即可 $\Theta(3^n)$ 解决原问题。

并不太清楚该问题是否能做到 $\Theta(2^n poly(n))$，主要困难在于本题是有向边，故 $2^{cross(S-T,S)}$ 一项转移系数难以处理。如果是无向边容易凑成 $2^{cross(S,S)-cross(T,T)}$ 的形式从而写成标准的子集卷积形式。

本节习题一

1. 给定 n 个点 m 条边的有向图 $G=(V,E)$ 以及长度为 n 的系数序列 $cof_0 \sim cof_{n-1}$ 。
2. 考虑所有的长度为 n 的排列 p。将排列 p 写在纸带上于是有 $n-1$ 处可以剪断，对于一种剪断方案若剪断了 k 处，该方案带权值 cof_k。现在可以将剪出来的 $k+1$ 个的部分之间的顺序重排，设拼回去得到排列 q。若一个排列与对应的一种剪断方案满足可以拼回去得到排列 q 满足其是原图的任意拓扑序，认为这组排列与剪断方案组成的二元组是合法的。
3. 求所有合法的排列与剪断方案构成的二元组的权值和，答案对 10^9+7 取模。
4. $1 \le n \le 15, 0 \le m \le \dfrac{n(n-1)}{2}$。

source： QOJ8325 联合省选 2024 D2T2 重塑时光，有修改。

本节习题二

1. 给定 n 个点 m 条边且边带权的简单无向图 $G=(V,E)$。现在将 G 中每条无向边拆成两条方向相反的有向边，权值不变，得到 $2m$ 条边的有向图。
2. 对于这张有向图，其所有边独立地以 $\frac{1}{2}$ 概率保留，$\frac{1}{2}$ 概率删除，设得到的图是 G'。求 G' 满足其最小外向生成树（根可以是任意点）边权和等于 G 最小生成树边权和的概率，答案对 10^9+7 取模。
3. $1 \le n \le 15, 0 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$。

source：QOJ10151 联合省选 2025 D2T2 岁月。

双连通性限制

无向图上更复杂一些的连通性限制是双连通性，具体来说分为点双连通性和边双连通性。这相比连通性当然会更加复杂，但还是可以得到很好的刻画的。

在子图计数问题上，处理双连通性的强大技巧是“点双联通-连通 变换”和“边双连通-连通 变换”，但事实上沿用相似的思路可以做更多的一些事。

由于时间原因，今天就只介绍“边双连通-连通 变换”了。

数边双连通子图

1. 给定 n 个点 m 条边的简单无向图 $G=(V,E)$，求有多少边集 E' 满足 $E'\subseteq E$ 且 (V,E') 是边双连通图。答案对 998244353 取模。
2. $1\leq n\leq 18, 0\leq m\leq \binom{n}{2}$。

source： LOJ6730 边双连通生成子图计数。

边双连通-连通 变换

首先对于一张连通无向图，如果将所有非割边两边的点缩起来，图会形成一颗树。这颗树上每个点对应原图的一个边双连通分量，每条边对应原图的一条割边。

考虑一个反过来的问题：假设给原图所有子集 $S \subseteq U$ 均赋了权重 a_S，并定义一张连通子图的权值是其所有边双对应的 a 之积，并且我们还已经对所有 S 知道了 S 的边双连通边子图数量是 b_S，如何求原图所有边子图的权值和。

如果已经确定的边双给出的对 U 的集合划分，把每个边双缩为一个点后，这一方案的 a 之积是确定的，各个边双内部的连边方案数是对应的 b 也是确定的，而边双之间的连边方案数相当于做生成树计数。不过如果这样看待问题并不好优化。

边双连通-连通 变换

我们分阶段考虑这个问题，设 $p_0 \sim p_n$ 是 n 个集合幂级数，$(p_i)_S$ 表示 S 的导出子图的所有满足**只存在两端编号最大值不超过** i 的割边的边子图的权值和。最后希望计算 p_n，而 p_0 因为不允许出现割边，其实 $(p_0)_S = a_S b_S$。

于是只需要能利用 p_{u-1} 计算出 p_u。p_u 的限制比 p_{u-1} 松，具体体现在其允许两端编号最大值为 u 的割边。那么 u 这个点是关键的，设现在在考虑某个 S（$u \in S$）的导出子图的合法边子图，如果将所有两端编号最大值为 u 的割边断开，这张边子图将会分裂成若干连通块，根据连通块给出的点集划分设 $S = P \cap T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_k$，其中 $u \in P$，所有 P, T_i 两两无交。那么这张边子图在所有 P 或 T_i 的部分都符合 p_{u-1} 的限制，这是递归到子问题的形式。并且这个划分当然是唯一的。

边双连通-连通 变换

于是要计算 $(p_u)_S$ 只需枚举 S 像这样的集合划分，对应的所有边子图权值和是 $(p_{u-1})_P\prod_{i=1}^{k}(p_{u-1})_{T_i}cof(u,T_i)$，其中 $cof(u,T_i)$ 表示选一个 $v\in T_i, v<u$ 新连上 (u,v) 这条子图中的割边的方案数，其实也就是原图中 u 与多少在 T_i 内且编号小于自己的点有连边。

那么设 $(q_{u-1})_S=[u\notin S](p_{u-1})_S\cdot cof(u,S)$，在只考虑 $u\in S$ 的项的意义下，$p_u=p_{u-1}\times(\exp q_{u-1})$。注意若 $u\notin S$ 那么上述分析其实都无效，但当然 $(p_u)_S=(p_{u-1})_S$。

于是计算一次子集 exp 和一次子集卷积即可通过 p_{u-1} 计算出 p_u。总共需要计算 n 次故时间复杂度为 $\Theta(2^n n^3)$，称这种操作为正向的“边双连通-连通 变换”。

边双连通-连通 变换

但对于原问题来说，我们只是解决了一个反向的问题。不过由组合意义我们知道，假设在我们解决的反向问题中所有 a 均为 1，那么 $(p_n)_S$ 应当就是 S 导出子图的连通边子图数，这可以 $\Theta(2^n n^2)$ 计算。

回忆 p_u 与 p_{u-1} 的关系：若 $u \in S$，$(p_u)_S = (p_{u-1} \times \exp(q_{u-1}))_S$，否则 $(p_u)_S = (p_{u-1})_S$。

假设已经知道 p_u，那么所有满足 $u \notin S$ 的 $(p_{u-1})_S$ 项也已知，于是 q_{u-1} 已知，$\exp q_{u-1}$ 也已知，那么 $p_{u-1} = p_u \times (\exp q_{u-1})^{-1}$，即 $p_{u-1} = p_u \times \exp(-q_{u-1})$。

这里可能稍有一些问题，因为这个等式仅在 $u \in S$ 的项成立。比较精确的理解是只取 p_u, p_{u-1} 满足 $u \in S$ 的项，q_{u-1} 满足 $u \notin S$ 的项，对于生成的三个定义在 $U \setminus \{u\}$ 上的集合幂级数该关系式成立。

边双连通-连通 变换

称这种给出 p_n 反向解出 p_0 的操作是反向的“边双连通-连通 变换”，同样只需计算 n 次子集 exp 和 n 次子集卷积，时间复杂度为 $\Theta(2^n n^3)$。

在这道例题中，$(p_0)_S = a_S b_S$，因为取 $a_S = 1$ 故 $(p_0)_S = b_S$，答案就是 $(p_0)_U$。

fun fact：这题比较广为流传的做法是把边双的问题转到点双上去做，因为边双连通图是不存在大小为 2 的点双的图。然而这种方法并不总是生效，例如下题。

一道边双连通-连通 变换的例题

1. 给定一张 n 个点 m 条边的图 $G=(V,E)$，求其有多少边子图 $G'=(V,E')$ 满足 $E'\subseteq E$，且 G' 满足 k 条给定的限制：
2. 第 i 条限制是在 (V,E') 上，从 s_i 到 t_i 必须至少有 c_i 条不同的边简单路径。$1\le c_i\le 2$。
3. 答案对 998244353 取模。
4. $1\le n\le 16, 0\le m\le \binom{n}{2}, 0\le k\le n(n-1)$。

source： UOJ962 UR#30B 交通管制

一道边双连通-连通 变换的例题

存在至少一条简单路径对应连通性限制，接下来考虑对于一个连通块，其中哪些点对 u, v 间只存在一条边简单路径。

因为一个边双内任意两点均存在两条边集不相交的边简单路径，因此缩边双树之后，只要 u, v 所属的边双在树上的简单路径经过了大小 > 1 的边双，实际上它们之间就存在至少两条边简单路径。那么对于确定的边双树，称大小 > 1 的边双为黑点，大小 $= 1$ 的边双为白点，u, v 间只存在一条边简单路径当且仅当它们所属同一个白色连通块。

先不妨假设连通性限制已经要求原图连通，一张边子图根据极大白色连通块和黑色点给出了对原图点集 U 的划分 $U = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_m \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_k$。

P_i 对应极大白色连通块，Q_i 对应一个大小大于 1 的边双。

一道边双连通-连通 变换的例题

一组划分合法，当且仅当对于不存在限制 $(s_j, t_j, 2)$ 与 $1 \le i \le m$ 使得 $s_j, t_j \in P_i$，相当于说一些 P_i 是不能存在的。

假设划分确定，某个 P_i 内部的连边数相当于这个点集导出子图的生成树计数，直接使用矩阵树定理计算是 $\Theta(2^n n^3)$ 的，其实也可以 $\Theta(2^n n^2)$ 不过不重要。某个 Q_i 内部的连边数根据上一道例题可以 $\Theta(2^n n^3)$ 全部计算出。

之间的连边还是把一个 P_i, Q_i 缩成一个点之后相当于做生成树计数。但注意因为要求 P_i 是极大的，不能将两个极大白色连通块相连！

回忆经典题“n 种颜色的小球第 i 种有 a_i 个，有多少种排列小球的方式使得没有同色小球相邻”是如何解决的：容斥枚举一些小球对同色且相邻。这两个问题非常类似，因此处理这一限制也可以考虑容斥。

一道边双连通-连通 变换的例题

现在还是认为所有 P_i, Q_i 的集合划分确定。把连边看作两个阶段：第一阶段只能在 P_i 间连边，连边边权为 -1，第二阶段可以任意连边，连边边权为 1。

那么对于连出来边集一致（忽略边权）的一些生成树，假设其将两个极大白色连通块相连，这条边既可以在第一阶段连也可以在第二阶段连，因此权重抵消了。

于是设 f_S 表示 S 导出子图生成树计数，$f_S = f_S valid(S)$，$valid(S)$ 表示 S 是否能作为一个极大白色连通块，g_S 表示 S 导出子图的边双连通边子图数量。设 $transfer(F, c)$ 为将 F 进行每额外选一条割边贡献乘上 c 的正向“边双连通-连通 变换”后得到的集合幂级数。原问题的答案是 $transfer(transfer(f, -1) + g, 1)_U$。

一道边双连通-连通 变换的例题

之前介绍了如何进行 $transfer(F,1)$，实际上扩展到 $transfer(F,c)$ 也没有任何困难。这样就 $\Theta(2^n n^3)$ 解决了若连通性限制已经要求原图连通的问题。

对于一般的情况，注意到 $transfer(transfer(f,-1)+g,1)$ 相当于对所有 $S \subseteq U$ 计算了 S 导出子图中有多少连通边子图满足所有 $(s_j,t_j,2)$ 的限制，只要 $s_j,t_j \in S$。原图任意的边子图根据连通块给出了对 U 的点集划分，一些划分出来的点集可能不满足连通性限制，对所有满足连通性限制的点集的答案做 exp 即可。

时间复杂度 $\Theta(2^n n^3)$。

本节习题一

1. 给定 n 个点 m 条边的简单无向图 $G=(V,E)$，求有多少边集 E' 满足 $E' \subseteq E$ 且 (V,E') 是点双连通图。答案对 998244353 取模。
2. $1 \le n \le 18, 0 \le m \le \binom{n}{2}$。

source： LOJ6729 点双连通生成子图计数。

本节习题二

1. 给定 n 个点 m 条边的简单无向图 $G=(V,E)$，求有多少边集 E' 满足 $E' \subseteq E$ 且 (V,E') 是边仙人掌（每条边至多属于一个简单环的简单连通图）。答案对 998244353 取模。
2. $1 \le n \le 18, 0 \le m \le \binom{n}{2}$。

source： LOJ6719 数仙人掌加强版。

本节习题三

1. 给定 n 个点 m 条边的简单无向图 $G=(V,E)$，和 k 个点对 s_i,t_i。
2. 定义 G 的一个边子图 $G'=(V,E')$ 满足 $E'\subseteq E$ 的权值是 $2^{|E'|-c}$，其中 c 表示有多少边 $(u,v)\in E'$ 满足存在一个 $1\le i\le k$ 使得 G' 上存在一条 s_i 到 t_i 的边简单路径。
3. 求 G 所有边子图权值和，答案对 10^9+7 取模。
4. $1\le n\le 16, 0\le k,m\le \binom{n}{2}$。

source：洛谷 P11567 建造军营 II。

致谢

谢谢大家！