

浅谈再谈格路计数

北京市十一学校 吴畅

1 前言

计数是算法竞赛中的一大重要板块，而格路计数是其中较为常见的模型之一。在计算机科学界和数学界，格路计数也得到了广泛的研究。

笔者注意到，目前大多数选手对格路计数的了解，仍只停留在反射容斥和 Dyck 路上；另一方面，也鲜有比较复杂的格路计数题目。事实上，许多相关结论和算法是非常适合放入算法竞赛中的，笔者的集训队互测题就是一次尝试。为此，笔者撰写本论文，旨在向读者展示格路计数更广阔、更有前景的一面。

本文主要分为不相交格路、边界限制、特征限制三章，基本涵盖了算法竞赛中较为常见的格路计数模型，将一些原本零碎的结论进行了统一。另外，相比于代数推导，本文更注重组合上的一些较为直观的方法，这也是算法竞赛更常考察的。

2 基本定义与约定

定义 2.1 (步长, 步长集合). 称 $\mathbb{Z}^d$ 上的一个向量为一种步长，若干步长构成的集合为一个步长集合。

定义 2.2 (格路). 考虑 $\mathbb{Z}^d$ 上的序列 $P = (P_0, P_1, \dots, P_l)$ ，以及步长集合 $\mathbb{S}$ ，若满足 $\forall 0 \leq i < l, \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \in \mathbb{S}$ ，则称 P 是步长集合 $\mathbb{S}$ 下的一条长度为 l 的格路。

定义 2.3 (简单步, 简单格路). 若 $\mathbb{Z}^d$ 上的步长 $s = (s_1, s_2, \dots, s_d)$ 满足 $\forall 1 \leq i \leq d, s_i \in \{0, 1\}$ 且 $\sum_{i=1}^d s_i = 1$ ，则称 s 是简单步。步长集合由 $\mathbb{Z}^d$ 上所有简单步构成的格路，称为简单格路。

为了方便，将从 A 到 E ，长度为 m 、步长集合为 $\mathbb{S}$ 、约束集合为 R 的所有格路构成的集合表示为以下记号

$$L_m(A \rightarrow E; \mathbb{S} | R)$$

有时该记号中的若干部分会被省略，请留意上下文中的陈述。通常来讲，简单格路会省略步长集合和长度，自由（无限制）格路会省略约束集合。例如 $L((0, 0) \rightarrow (1, 1) | x \geq y) = \{((0, 0), (1, 0), (1, 1))\}$ 。

另外，若 A 和 E 是两个长度相同的格点序列，那么对应的记号表示的是每对起点终点之间的路径形成的路径组的集合。

当我们想带权计数时，使用记号

$$GF(\mathcal{M}; w) := \sum_{x \in \mathcal{M}} w(x)$$

其中 w 是定义在集合 $\mathcal{M}$ 上的函数。通常情况下 $\mathcal{M}$ 是路径或路径组的集合，而 w 同时定义在边、路径和路径组上：路径的权值为所有边权的乘积；路径组的权值为所有路径权值的垂和

3 不相交格路

对于有向无环图 G 上的两条路径 $P = (P_0, P_1, \dots, P_{l_P})$ 和 $Q = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{l_Q})$, 若满足 $\forall 0 \leq i \leq l_P, 0 \leq j \leq l_Q, P_i \neq Q_j$, 则称 P 和 Q 不相交。

若简单格路组成的 r 元组 $(P_1, P_2, \dots, P_r)$ 两两不相交, 则称这是一组不相交格路。反之, 称其为一组相交格路。

本节将会介绍几种方法, 用于解决不相交格路相关的若干计数问题。事实上, 这些方法大多可以在添加一些限制或减弱一些要求后, 扩展到更一般的情形中, 而在不相交格路中会被更自然的满足。

3.1 行列式与 Pfaffian

首先介绍一些本章中涉及的线性代数工具, 主要围绕行列式与 Pfaffian 展开。

为此, 先明确一些记号: 记 $\mathfrak{S}_n$ 表示全体长度为 n 的排列构成的集合。对序列 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 以及 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, 令 $\mathbf{v}_\sigma = (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)})$ 。对 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, 令 $\text{sgn } \sigma$ 表示 $(-1)^{\text{inv } \sigma}$, 其中 $\text{inv } \sigma$ 表示 σ 的逆序对数。

定义 3.1 (行列式). 令 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{n \times n}$ 是一个方阵, 定义 $\mathbf{A}$ 的行列式为

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\text{sgn } \sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

由于行列式是较为常用的概念, 关于它的更多信息这里不再赘述。

定义 3.2 (完美匹配). 称一个长度为 $2n$ 的排列 $\pi \in \mathfrak{S}_{2n}$ 是完美匹配, 当且仅当其满足

- $\forall 1 \leq i \leq n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i}$
- $\forall 1 \leq i < n, \pi_{2i-1} < \pi_{2i+1}$

对所有 $1 \leq i \leq n$, 称 π_{2i-1} 和 π_{2i} 是一对匹配的元素。

记 $\mathfrak{M}_{2n}$ 表示全体长度为 $2n$ 的完美匹配构成的集合。对 $\pi \in \mathfrak{M}_{2n}$, 若 π 中的匹配 (w, y) 和 (x, z) 满足 $w < x < y < z$ 或 $w > x > y > z$, 则称它们相交。这里 π 是一个排列, 因此我们可以如上定义 $\text{inv } \pi$ 和 $\text{sgn } \pi$ 。

值得一提的是, $\text{inv } \pi$ 和 π 中相交的匹配对数量的奇偶性相等, 这是不难验证的。另外, 我们还有一种递归的方法计算 $\text{inv } \pi$ 的奇偶性:

取 π 中任意一对匹配的元素 (i, j) , 将它们删去, 其余元素在下标和值域上填补空缺。可以得到一个 $\pi' \in \mathfrak{M}_{2n-2}$, 那么 $\text{inv } \pi \equiv \text{inv } \pi' + j - i - 1 \pmod{2}$ 。

定义 3.3 (反对称矩阵). 令 $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{n \times n}$ 是一个方阵, 若 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, 则称 $\mathbf{A}$ 是一个反对称矩阵。

可以发现, 反对称矩阵满足主对角线上为 0, 关于主对角线对称的元素互为相反数。因此, 我们可以只用主对角线上方的元素 $(a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ 来描述一个 $n \times n$ 的反对称矩阵 $\mathbf{A}$ 。

定义 3.4 (Pfaffian). 令 n 是偶数, $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ 是一个反对称矩阵, 定义 $\mathbf{A}$ 的 Pfaffian 为

$$\text{Pf}(\mathbf{A}) = \sum_{\pi \in \mathfrak{M}_n} (\text{sgn } \pi) \prod_{i=1}^{n/2} a_{\pi(2i-1), \pi(2i)}$$

注意到行列式和 Pfaffian 的定义十分相似, 接下来我们将列出一些 Pfaffian 的性质, 说明二者之间的联系。

命题 3.1. 假设 n 是偶数, A 是大小为 n 的反对称矩阵, X 是大小为 n 的方阵

(a). $\text{Pf}(1)_{1 \leq i < j \leq n} = 1$, 等价地, $\sum_{\pi \in \mathfrak{M}_n} \text{sgn } \pi = 1$ 。

(b). $\text{Pf}(X^T A X) = \det(X) \text{Pf}(A)$ 。

(c). $\text{Pf}(A)^2 = \det(A)$ 。

对于给定的反对称矩阵 A , 为了计算 $\text{Pf}(A)$, 你可能会考虑用 (c) 转化成求 $\det(A)$ 。可惜在一般交换环上开根号并不是一件方便的事情。而事实上, 我们只需要令 (b) 中的 X 是初等行变换矩阵, 就可以得到与 $\det$ 类似的消元过程, 更详细的内容此处不再赘述。复杂度同高斯消元。

3.2 起点与终点固定

接下来我们将简述广为人知的 LGV 引理。引理中的 $L_G(\dots)$ 含义与 $L(\dots)$ 基本相同, 唯一的区别是语境不再是格路而是有向无环图 G 上的路径。

引理 3.1 (LGV 引理). 令 $G = (V, E)$ 是一张有向无环图, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ 均是节点组成的序列, 即 $\forall 1 \leq i \leq n, A_i, E_i \in V$ 。每条边 $e \in E$ 被赋予了边权 $w(e)$, 一条路径 P 的权值为 $w(P) = \prod_{e \in P} w(e)$, 一个路径组 $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的权值为 $\prod_{i=1}^n w(P_i)$ 。那么我们有

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\text{sgn } \sigma) GF(L_G(\mathbf{A}_\sigma \rightarrow \mathbf{E} \mid \text{non-intersecting}); w) = \det_{1 \leq i, j \leq n} (GF(L_G(A_j \rightarrow E_i); w))$$

证明. 将等号右边的行列式展开得到

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} (GF(L_G(A_j \rightarrow E_i); w)) = \sum_{\substack{(\sigma, \mathbf{P}), \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n, \mathbf{P} \in L_G(\mathbf{A}_\sigma \rightarrow \mathbf{E})}} (\text{sgn } \sigma) w(\mathbf{P})$$

接下来, 我们将构造一个对合 ϕ , 定义在二元组 $(\sigma, \mathbf{P})$ 上, 其中 $\mathbf{P} \in L_G(\mathbf{A}_\sigma \rightarrow \mathbf{E})$ 是相交的路径组, 满足符号相反、权值不变。也就是说, 令 $(\sigma_\phi, \mathbf{P}_\phi) = \phi((\sigma, \mathbf{P}))$, 那么有 $\text{sgn } \sigma_\phi = -\text{sgn } \sigma$ 且 $w(\mathbf{P}_\phi) = w(\mathbf{P})$ 。

假如这样的 ϕ 存在, 将会使所有 $(\sigma, \mathbf{P})$ 的贡献 (其中 $\mathbf{P}$ 是相交的) 两两抵消。于是只剩下了不交路径组的贡献, 刚好和原式等号左边等价, 立刻证明该引理。现在我们来构造一个这样的对合。

取任一 G 的拓扑序 $\mathcal{A}$ 。对 $(\sigma, \mathbf{P})$, 其中 $\mathbf{P}$ 是相交路径组, 我们将每个交点描述为 (M, i, j) 的形式, 表示 P_i 和 P_j 在 M 处有一交点。找到所有这样的三元组中字典序最小的一个 (记为 (M, i, j)), 其中第一维的比较按照 $\mathcal{A}$ 上的排名进行。接下来我们交换 P_i, P_j 在 M 前的子路径, 便得到了需要构造的 ϕ 。如图 1 所示。

不难发现, 进行完这个变换后, P_i 和 P_j 仍相交于 A 。因此, 我们在 $(\sigma, \mathbf{P})$ 上进行两次映射 ϕ , 会回到 $(\sigma, \mathbf{P})$, 也就是说 ϕ 是一个对合。另一方面, 设变换后的二元组为 $(\sigma_\phi, \mathbf{P}_\phi)$, 那么可以发现: σ_ϕ 只是将 σ 中的第 i 个元素和第 j 个元素进行了交换, 符号取反; 而由于组成路径的可重边集在变换后不变, $w(\mathbf{P}_\phi) = w(\mathbf{P})$ 。至此验证了 ϕ 是满足要求的对合。 $\square$

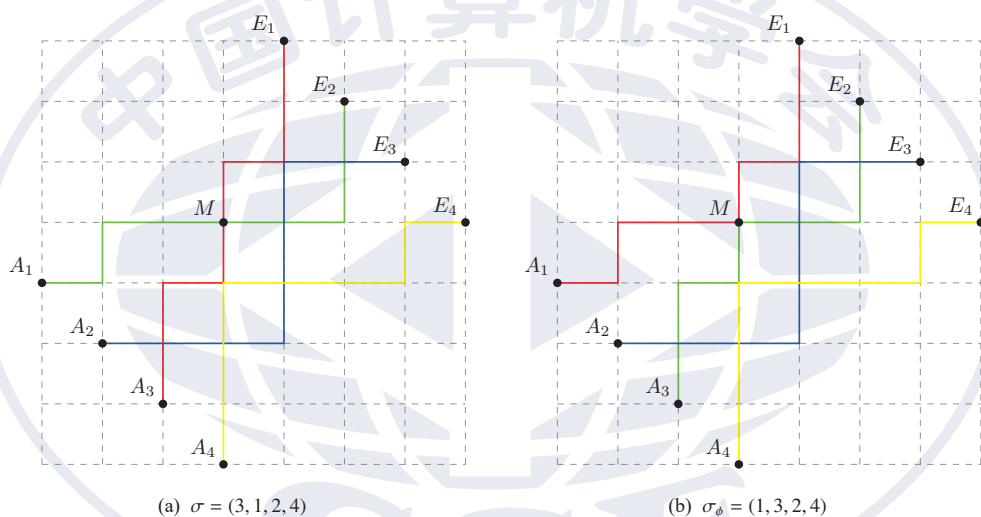


图 1: 格路上的 LGV—— ϕ 中对应的一对 $(\sigma, \mathbf{P})$

LGV 帮我们抵消了相交格路的贡献, 但是仍只能求出所有不相交格路带符号的求和。

假如 LGV 引理中的有向无环图 G 以及其上的顶点集合 $\mathbf{A}, \mathbf{E}$ 满足, $\forall i < j, k < l$, 任意 $P \in L_G(A_i \rightarrow E_l)$ 和 $Q \in L_G(A_j \rightarrow E_k)$ 相交, 那么称 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 G -协调的。

可以发现, 如果添加了 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 G -协调的这个条件, 那么等号左边不为 0 的项只有 $\sigma = (1, 2, \dots, n)$ 。我们便刚好可以求出, 这种匹配方式对应的不交路径组数量。

定理 3.1. 令 G 是一张有向无环图, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n), \mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ 是 G -协调的节点序列, w 是边权函数 (同样定义在路径和路径组上)。

$$GF(L_G(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E} \mid \text{non-intersecting}); w) = \det_{1 \leq i, j \leq n} (GF(L_G(A_j \rightarrow E_i); w))$$

在简单格路的环境下, 这个条件更容易被满足, 例如 $A_i = (1, a_i), E_i = (n, e_i)$ 。事实上, 绝大多数 LGV 的自然出现就是在格路计数中。

3.3 起点固定、终点不固定

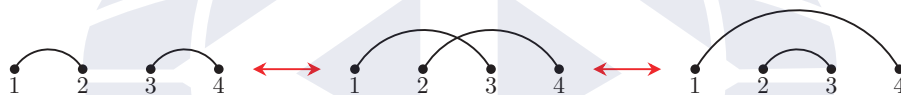
3.3.1 终点在集合内任选

LGV 引理只能解决路径数量、起点数量和终点数量都相等的情形，也就是路径的起点集合和终点集合恰好为给出的两个集合。

接下来我们考虑，给定有向无环图 G 和起点集合 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ ，终点集合 $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ ，满足 $n \leq m$ 且 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 G -协调的，每个起点 $a \in \mathbf{A}$ 需要选一个终点 $e \in \mathbf{E}$ ，求所有选法的不相交路径的方案数。

引理 3.2. 令 n, i, j 是三个正整数，满足 $1 \leq i < j \leq n$ 。对完美匹配 $\pi \in \mathfrak{M}_n$ ，满足在 π 中 i 和 j 不匹配，令 π' 表示交换 π 中 i 和 j 的位置，然后在保持匹配关系不变的情况下，重排形成的新完美匹配。假如对所有 $i < k < j$ ，在 π 中 k 和 i, j 均不匹配，那么 $\text{sgn } \pi = -\text{sgn } \pi'$ 。

证明. 根据引理中所给的条件， i, j 及其匹配元素的变换情况，只可能为下图两种中的一种。用 3.1 节中提到的方法比较 $\text{inv } \pi$ 和 $\text{inv } \pi'$ 的奇偶性，也就是分别删去 i, j 及其匹配元素并检查贡献的不同。不难验证，在两种情况下，该引理均是正确的。



□

定理 3.2. 令 G 是一张有向无环图， $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{2n})$, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ 是 G -协调的节点序列， w 是边权函数。

$$\sum_{\mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}, |\mathbf{E}'| = 2n} GF(L_G(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E}' \mid \text{non-intersecting}); w) = \text{Pf}_{1 \leq i < j \leq 2n} (Q_G(i, j; w))$$

其中 $Q_G(i, j; w)$ 表示对所有不交路径对 (P', P'') ，满足起点分别为 A_i 和 A_j ，终点均为 $\mathbf{E}$ 中的点， $\sum_{(P', P'')} w(P')w(P'')$ 。

证明. 我们希望仿照 LGV 引理的证明，构造对合 ϕ 将二元组 $(\pi, \mathbf{P})$ 中 $\mathbf{P}$ 相交的那些消掉。

取任一 G 的拓扑序 $\mathcal{A}$ 。对于一个相交路径组 $\mathbf{P}$ ，我们将每个交点描述为 (M, i, j) 的形式，表示 P_i 和 P_j 在 M 处有一交点。找到所有这样的三元组中字典序最小的一个（记为 (M, i, j) ），其中第一维的比较按照 $\mathcal{A}$ 上的排名进行。交换 P_i, P_j 在 M 前的子路径；同时交换 i, j 在 π 中的位置，保持元素的匹配关系不变的情况下重排。便得到了需要构造的 ϕ 。

这个对合和 LGV 引理中构造的十分相似，不难发现 $w(\mathbf{P})$ 不变，接下来只需要说明符号取反。首先，由于 $Q_G(i, j; w)$ 的定义保证了匹配的起点对应的路径不交，因此 i 和 j 在 π 中不匹配。

其次, 假设存在 $i < k < j$ 和 i, j 其一匹配, 不妨设 k 和 i 匹配。记 P_i, P_k 对应的的终点编号分别为 id_i, id_k , P_i, P_j 分别被 M 分割成 AB 和 CD 。根据假设 P_k 和 A, B 均不交, 而由于 M 是拓扑序最小的交点, P_k 和 C 也不相交。由于 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 G -协调的, 必然有 $id_k > id_i$, 否则它们不可能不交。现在考虑路径 P_k 以及 CB , 由于 CB 的终点 id_i 在 id_k 前面, P_k 和 CB 必然相交, 而前面推出了 P_k 和 C, B 均不相交, 矛盾。

这样一来, ϕ 对 π 的影响, 也就是交换 i 和 j 的位置, 满足引理 3.2 中的条件, 因此符号必然取反。由于 A, C 上不存在其它的交点, 也容易说明再进行一次变换会回到初始状态, 进而 ϕ 是对合。

最后, 待验证的是, 每组合法的不交路径恰好贡献 1。由命题 3.1(a) 这也是显然的。□

假如路径数量 (同起点集合) 是奇数, 我们只需向 G 加一个没有任何邻边的虚点 v , 同时将 v 添加到 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 的末尾。这样一来, 起点集合的 v 只能和终点集合的自己以唯一的方式匹配, 答案不变但转化为了偶数的情况。

3.3.2 混合情况

定理 3.3. 令 G 是有向无环图, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n), \mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m), \hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k)$ 是三个节点序列, 满足 $n \geq m$ 且 $n + m$ 是偶数, 另外 $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ 和 $\mathbf{E}$ 是 G -协调的, $(A_{m+1}, A_{m+2}, \dots, A_n)$ 和 $\hat{\mathbf{E}}$ 是 G -协调的。 w 是边权函数。

$$GF(L_G(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E} \cup \hat{\mathbf{E}} \mid \text{non-intersecting}); w) = (-1)^{\binom{m}{2}} \text{Pf} \begin{pmatrix} Q & H \\ -H^T & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $L_G(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E} \cup \hat{\mathbf{E}} \mid \text{non-intersecting})$ 表示所有起点序列为 $\mathbf{A}$ 的长度为 n 的不交路径组 $\mathbf{P}$, 满足 $\forall 1 \leq i \leq m, P_i$ 的终点属于 $\mathbf{E}$; $\forall m < i \leq n, P_i$ 的终点属于 $\hat{\mathbf{E}}$ 。 $Q = (Q_G(i, j; w))_{1 \leq i, j \leq n}$ 是一个反对称矩阵, 任意 $i < j$, $Q_G(i, j; w)$ 表示对所有不交路径对 (P', P'') , 满足起点分别为 A_i 和 A_j , 终点均为 $\hat{\mathbf{E}}$ 中的点, $\sum_{(P', P'')} w(P')w(P'')$ 。 $H = (GF(L_G(A_i \rightarrow E_j); w))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ 是一个 $n \times m$ 的矩阵。

事实上, 该定理是 minor summation formula 的特殊情况 [1], 后者的其中一种形式在下面给出:

定理 3.4. 令 m, n, p 是正整数, 满足 $n + m$ 是偶数且 $0 \leq n - m \leq p$ 。令 M 是一个 $n \times p$ 的矩阵, H 是一个 $n \times m$ 的矩阵, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq p}$ 是一个反对称矩阵。那么我们有

$$\sum_K \text{Pf}(A_K^K) \det(M_K; H) = (-1)^{\binom{m}{2}} \text{Pf} \begin{pmatrix} MAM^T & H \\ -H^T & 0 \end{pmatrix}$$

其中 K 枚举所有 $1, 2, \dots, p$ 的 $n - m$ 元子集, A_K^K 表示 A 选取 K 对应的行列得到的反对称矩阵, M_K 表示 M 选取 K 对应的列得到的矩阵。

3.4 起点和终点不固定

最后我们来看起点和终点都不固定的情况。此时答案还由路径组中的路径数量决定，我们考虑直接求出答案关于路径数量的生成函数。

定理 3.5. 令 G 是一张有向无环图， $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ 是节点序列，满足 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{E}$ 是 G -协调的， w 是边权函数。

$$\sum_{s \geq 0} x^s \sum_{\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}, \mathbf{E}' \subseteq \mathbf{E}, |\mathbf{A}'| = |\mathbf{E}'| = s} GF(L_G(\mathbf{A}' \rightarrow \mathbf{E}' \mid \text{non-intersecting}); w)$$

当 n 是奇数时

$$= \text{Pf}_{1 \leq i < j \leq n+1}((-1)^{i+j-1} + x^2 Q_G(i, j; w))$$

其中 $Q_G(i, j; w)$ 在 $j \leq n$ 时与定理 3.2 的定义一致，而 $Q_G(i, n+1; w) = x^{-1} \sum_{E \in \mathbf{E}} GF(L(A_i \rightarrow E); w)$;

当 n 是偶数时

$$= \text{Pf}_{1 \leq i < j \leq n+2}((-1)^{i+j-1} + x^2 Q_G(i, j; w))$$

其中 $Q_G(i, j; w)$ 在 $j \leq n+1$ 时定义同上，而 $Q_G(i, n+2; w) = 0$ 。

证明. 观察 $(-1)^{i+j-1} + x^2 Q_G(i, j; w)$ ，其意义即为是否同时选择这对匹配的两个起点。如果不选择这对匹配，由前文我们知道它会对符号产生影响 $(-1)^{i+j+1}$ ，这里刚好将其消去；如果选择则乘上 x^2 及不交路径数。

那么我们可以将 Pfaffian 展开，得到的每一项还是形如 $(\pi, \mathbf{P})$ ，满足在 π 中匹配的起点同时属于或者不属于 $\mathbf{P}$ 的起点。于是我们在定理 3.2 的证明中构造的对合 ϕ 可以沿用至此，将相交路径的方案数抵消。

但是若干个匹配包含的起点数量一定是偶数，如果我们想选奇数个起点，需要添加一个虚点 A_{n+1} 和其中一个起点 A_i 匹配，匹配被选上的贡献就是 $x \sum_{E \in \mathbf{E}} GF(L(A_i \rightarrow E); w)$ 。这便对应了 n 是奇数时的答案。

当 n 是偶数时，为了让斜对称矩阵的大小变成偶数，我们还需要再添加一个空点。它和任何其它起点被同时选上的系数都是 0。这对应了 n 是偶数时的答案。

在两种情况中，都容易验证合法方案的贡献恰好为 1。这样便证明了该定理。□

对定理 3.5 的计算工作可以简化为求 $\text{Pf}(\mathbf{A} + \mathbf{B}x + \mathbf{C}x^2)$ ，其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 都是大小相同（不超过 $n+2$ ）的反对称矩阵。

在具体的题目中，例如笔者的集训队互测题¹，往往会将答案对大质数取模。一个直接的想法是插值，这样我们只需要计算 $O(n)$ 次常系数矩阵的 Pfaffian，但是复杂度略高。另一个想法是转化为求 $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}x + \mathbf{C}x^2)$ ，其经典做法是先将 $\mathbf{A}$ 消成单位矩阵，然后转化成求另一个常系数矩阵的特征多项式，复杂度是 $O(n^3)$ 的。更详细的做法可以参考该题题解以及网上的其它资料。

¹网格图最大流计数，<https://qoj.ac/problem/7648>



4 边界限制

边界限制，顾名思义，计数和给定边界不交的格路数量。

本节将会从 Ballot Problem 出发，讨论了直线边界下的若干问题，以及两个重要方法：折线法与旋转法，然后介绍了处理更一般边界的较为优秀的算法。

4.1 斜率为 1 的直线

4.1.1 Ballot Problem 与折线法

Ballot Problem 是指如下的组合问题：

- 在一场选举中，候选人 A 获得了 n 票，候选人 B 获得了 m 票，满足 $n > m$ 。求有多大的概率使得在计票过程中 A 的票数一直高于 B ？

不难发现，我们可以将其转化为格路计数模型。

首先 A 必须获得第一票。接下来，考虑一条从原点出发的路径，每当 A 获得一票就向右走一步，每当 B 获得一票就向上走一步。那么 A 的票数始终高于 B 的限制就变为，路径不能碰到 $y = x + 1$ 。

定理 4.1. 从 $(0, 0)$ 到 (n, m) ，始终不与 $y = x + 1$ 相交的格路数量为

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid x \geq y)| = \binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n+1} = \frac{n+1-m}{n+1} \binom{n+m}{n}$$

证明. 利用容斥原理，我们只需计算总的数量 $\binom{n+m}{n}$ 减去碰到过 $y = x + 1$ 的数量。

折线法，又名反射法、反射原理等等。它正是计算“碰到某条直线的格路数量”的利器，接下来我们将阐述其思想。

对于一条和 $y = x + 1$ 有交的路径 P ，我们可以找到其和 $y = x + 1$ 最早的交点 A 。沿着 $y = x + 1$ 将 P 在 A 之前的部分反射（对称）过去，便得到了一条从 $(-1, 1)$ 到 (n, m) 的格路。如图 2(a) 所示，红色路径在 A 之前的部分被反射变为蓝色路径。

如此，我们构造了映射 $\phi : L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid \text{Intersecting with } y = x + 1) \rightarrow L((-1, 1) \rightarrow (n, m))$ ，接下来我们想证明 ϕ 是双射，只需对每个像找到唯一的原像与之对应。这一点是容易的，因为任意一条 $L((-1, 1) \rightarrow (n, m))$ 中的路径至少和 $y = x + 1$ 有一个交点，我们找到最早的交点做一次逆变换即可。

综上，我们得到

$$\begin{aligned} |L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid x \geq y)| &= |L((0, 0) \rightarrow (n, m))| - |L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid x < y \text{ at least once})| \\ &= |L((0, 0) \rightarrow (n, m))| - |L((-1, 1) \rightarrow (n, m))| \\ &= \binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n+1} \end{aligned}$$

□

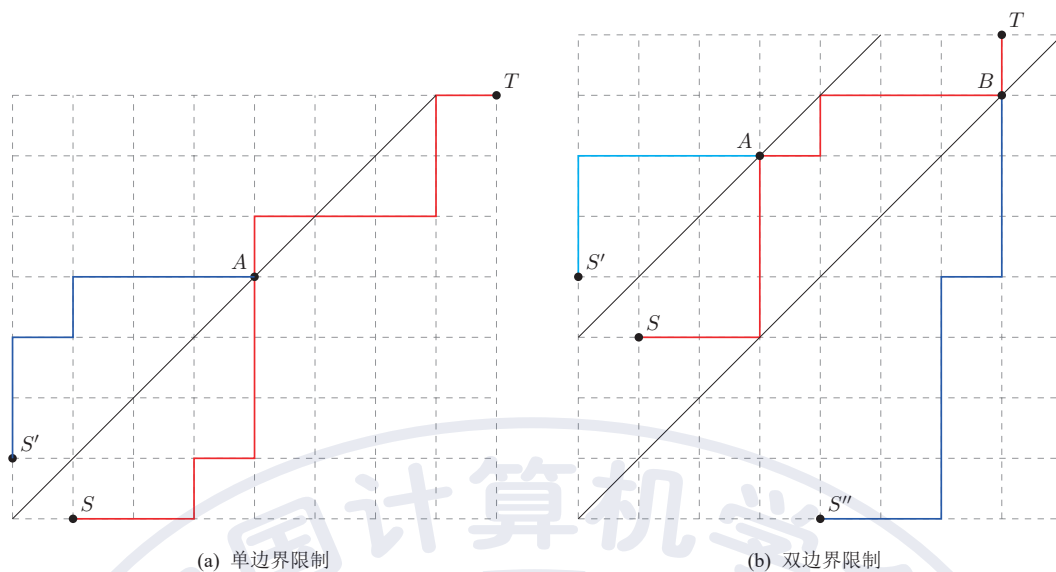


图 2: 折线法

借助定理 4.1，我们可以立刻得到 Ballot Problem 的答案： $\frac{n-m}{n+m}$ 。

进一步，如果起点和边界的位置关系任意，不难发现折线法仍然适用。

定理 4.2. 令 n, m 是非负整数, b 是负整数, 满足 $m > n + b$ 。从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终不与 $y = x + b$ 相交的格路数量为

$$|L((0,0) \rightarrow (n,m) \mid y > x + b)| = \binom{n+m}{n} - \binom{n+m}{n-b}$$

4.1.2 Dyck path 与卡特兰数

由定理 4.1 容易得到

推论 4.1. 从 $(0,0)$ 到 (n,n) , 始终不与 $y=x+1$ 相交的格路数量为

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, n) \mid x \geq y)| = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

这样的格路被称为 **Dyck 路**，其数量便是**卡特兰数**。它们的身影出现在组合数学的各个角落。

卡特兰数有各种各样组合意义、递推式、渐进估计。由于不是本文重点，此处略去。

Dyck 路有许多扩充定义 (generalized Dyck path), 我们将在 4.2.1 节讨论其中一种。



4.1.3 双边界限制与反射容斥

接下来我们考虑被两条斜率为 1 的直线限制的格路计数。形式化的, 给定 $n, m, l, r \in \mathbb{Z}$, 满足 $l < 0 < r, n + l < m < n + r$, 求从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终不与 $y = x + l$ 和 $y = x + r$ 相交的格路数量。

反射容斥的想法是, 先将计算的贡献容斥成若干部分, 然后用折线法一一处理。

对于一条格路 P , 维护一个字符串 $s(P)$, 每当它碰到 $y = x + l$, 就往 $s(P)$ 末端添加一个 L ; 每当他碰到 $y = x + r$, 就往 $s(P)$ 末端添加一个 R 。那么我们要求的就是 $|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid s(P) = \emptyset)|$ 。为了方便, 用 $\emptyset$ 表示空字符串; 记 $S \subseteq T$ 表示 S 是 T 的子序列; 记 $\#(S) = \sum_{P \in L((0, 0) \rightarrow (n, m))} [S \subseteq s(P)]$ 。

首先我们审视折线法可以处理怎样的计数对象。类似 4.1.1 节中所述, 我们可以找到路径第一次和某边界的交点并将其翻转过去。其数量分别对应了 $\#(L)$ 和 $\#(R)$ 。

然而当我们两次将路径沿着同一直线反射后, 它会变会最初的形态, 这显然不是我们想要的。尽管不能多次将路径沿着同一直线反射, 但是可以沿着两条直线交替反射:

当我们将路径 P 沿着 $y = x + r$ 反射一次后, 假设找到的交点在 A , 那么反射后 P 在 A 之前的部分一定和 $y = x + l$ 无交。这样我们就可以进行沿着 $y = x + l$ 进行第二次反射, 使得这次反射找到的交点 B 在 A 之后。如图 2(b) 所示。

由此一来, 我们可以计数这样的对象: $\#(L), \#(R), \#(LR), \#(RL), \#(LRL), \#(RLR) \dots$, 接下来尝试用它们凑出所求, 考虑如下的容斥

$$[s = \emptyset] = [\emptyset \subseteq s] - [L \subseteq s] - [R \subseteq s] + [LR \subseteq s] + [RL \subseteq s] - [LRL \subseteq s] - [RLR \subseteq s] + \dots$$

该式的正确性是容易证明的。而等号右边的形式是折线法所擅长的, 我们有

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid s(P) = \emptyset)| = \#(\emptyset) - \#(L) - \#(R) + \#(LR) + \#(RL) - \#(LRL) - \#(RLR) + \dots$$

至此我们完成了反射容斥的工作, 代入自由格路的计算式立刻得到

定理 4.3. 令 n, m 是非负整数, l, r 是整数, 满足 $l < 0 < r, n + l < m < n + r$, 从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终不与 $y = x + l$ 和 $y = x + r$ 相交的格路数量为

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid x + l < y < x + r)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\binom{n+m}{n-k(r-l)} - \binom{n+m}{n-k(r-l)+r} \right)$$

可以发现, 当枚举的 k 过大时组合数恒为 0, 因此我们只需要计算 $O(\frac{n+m}{k})$ 个 $O(n+m)$ 量级的组合数。如果答案对大质数取模, 我们可以用一些多项式技术做到 $\tilde{O}(\sqrt{n+m})$, 由于不是本文重点, 故略去。

4.2 斜率为有理数的直线

对于最一般的边界 $y = kx + b$, 其中 $k, b \in \mathbb{R}$, 折线法不再适用, 似乎目前也没有较好的解决办法。本节将讨论一些特殊情况, 它们的答案存在着简洁的公式, 且均满足 $k \in \mathbb{Q}$ 。



4.2.1 (n, m) -Dyck 路

定义 4.1. 若一条从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的格路, 始终不经过 $y = \frac{m}{n}x$ 上方, 则称之为一条 (n, m) -Dyck 路。

记 $D(n, m) := |L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid y \leq \frac{m}{n}x)|$, 即 (n, m) -Dyck 路的数量。

若 n, m 互质, $D(n, m)$ 有简单的计算公式。我们先来证明一个引理。

引理 4.1 (Spitzer's Lemma). 若和为 0 的实数序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 满足其所有真子区间的和都不为 0, 那么 a 恰好存在一种循环移位使得任意前缀非负。

证明. 记 $s_i = \sum_{j=1}^i a_j$, 由真子区间非 0 的条件易知 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 两两不同。

假设某种循环移位 $a_p, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{p-1}$ ($1 \leq p \leq n$) 满足条件, 等价于 $\forall 1 \leq i \leq n, s_i \geq s_{p-1}$, 也即 $s_{p-1} = \min_{i=1}^n s_i$ 。因此恰有一个 p 满足条件。□

定理 4.4. 任意 $n, m \in \mathbb{Z}^+$, 满足 $(n, m) = 1$, (n, m) -Dyck 路的数量为:

$$D(n, m) = \frac{1}{n+m} \binom{n+m}{n}$$

证明. 对于一条从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的简单格路 P , 构造一个长度为 $n+m$ 的序列 A 。如果 P 的第 i 步是向上就令 $A_i := -n$, 否则 $A_i := m$ 。

可以发现 $\sum_{i=1}^{n+m} A_i = 0$; 如果 P 是合法的 (n, m) -Dyck 路, 那么 A 的任意前缀非负。因此根据 Spitzer's Lemma, P 恰好存在一个循环同构合法。对于所有简单格路, 将它们按循环同构关系分为 $\frac{1}{n+m} \binom{n+m}{n}$ 类, 每个等价类中恰有一条路径合法。□

对于 (n, m) 不互质的情况, 这个做法会出现两个问题: 路径可能在中途和 $y = \frac{m}{n}x$ 相交, 以及循环同构的等价类大小不一定是 $n+m$ 。

针对这两个问题, 考察一条与 $y = \frac{m}{n}x$ 相交了 k 次 (包含终点不含起点) 的路径, 且其最短循环节为 l 。那么其每个循环节内恰好有 $\frac{kl}{n+m}$ 个交点, 也就是说这 l 条不同的路径需要总共贡献 kl 次, 那么平均下来每条路径需要贡献 $\frac{k}{n+m}$ 次, 而在 Spitzer's Lemma 引理中只贡献了 $\frac{1}{n+m}$ 次。

记 $d = (x, y), n' = \frac{n}{d}, m' = \frac{m}{d}$ 。构造生成函数 F, G , 其中 $[x^i]F(x) = \frac{1}{i(n'+m')} \binom{i(n'+m')}{in'}$ (特别的, $[x^0]F(x) = 0$); $[x^i]G(x)$ 表示从 $(0, 0)$ 到 (in', im') , 除起点终点外严格在 $y = \frac{m}{n}x$ 下方的格路数量, 那么我们有

$$\ln(1 - G) = - \sum_{i \geq 1} \frac{G^i}{i} = -F$$

所求即为 $\frac{1}{1-G} = \exp F$ 。

另外, 当 n, m 有整除关系时, $D(n, m)$ 有更简单的算法, 将在下一节介绍。

4.2.2 广义 Ballot Problem

Ballot Problem 要求我们对起点在原点，边界斜率为 1 的直线计数。广义 Ballot Problem 中起点仍在原点，但边界斜率为任意正整数，终点在边界上方。

形式化的，给定正整数 n, m, μ ，满足 $m \geq \mu n$ ，求 $|L((0,0) \rightarrow (n,m) \mid y \geq \mu x)|$ 。

让我们尝试沿用之前的证明思路。先在路径开头加一步 $(0,1)$ ，现在起点变为 $(0,-1)$ ，那么问题转化为以下引理。

引理 4.2 (Cycle Lemma). 令 n, m, μ 是满足 $m \geq \mu n$ 的正整数。对于任一含 m 个 1 和 n 个 2 的长度为 $n+m$ 的序列 $p_1, p_2, \dots, p_{m+n}$ ，其恰好存在 $m - \mu n$ 个循环同构使得任意真前缀中 $\#(1) > \mu \#(2)$ ，即 1 的个数大于 2 的个数的 μ 倍。

证明. 将序列 p 首尾相接连成一个环。进行 n 次操作，每次找到一个 2，使得它前面有连续的 μ 个 1，将这 $\mu+1$ 个元素同时删去。最终得到一个长度为 $m - \mu n$ 的全 1 序列，可以发现序列中的每个 1 恰好对应了原问题中的一个合法的循环同构。 $\square$

有了这个引理，我们立刻得到广义 Ballot Problem 的答案：

定理 4.5. 任意 $n, m, \mu \in \mathbb{Z}^+$ ，满足 $m \geq \mu n$ ，从 $(0,0)$ 到 (n,m) ，始终不低于 $y = \mu x$ 的格路数量为

$$|L((0,0) \rightarrow (n,m) \mid y \geq \mu x)| = \frac{m - \mu n + 1}{m + 1} \binom{n+m}{n}$$

可以看到，这个问题中折线法难以沿用。接下来我们将介绍另一种方法——旋转法，它的核心思想和折线法十分相似，可以解决一类边界斜率为正整数且过起点的格路计数问题。

仍然考虑容斥，转化为存在 $y < \mu x$ 的路径数量。回顾折线法的想法：找到最小的非法点，将其之前的路径进行变换，双射到另一些自由路上。

我们如法炮制，取路径上第一个满足 $y < \mu x$ 的点 A ，那么存在唯一的 $1 \leq b \leq \mu$ 使得 A 在 $y = \mu x - b$ 上。

接下来，我们将所有非法路径按照 b 分成总共 μ 类，试图构造每一类与 $L((1,-1) \rightarrow (n,m))$ 的双射。

双射的构造方式是，将 A 前一条边 BA 由横向变为竖向，然后将之前的部分旋转 180 度接在前面。如右图所示，将 SB 旋转为 $B'S'$ 。

一方面，对映射后的路径寻找第一个不低于 $y = \mu x - b$ 的点，可以找到 A ；另一方面，取任意一条 $(1,-1)$ 到 (n,m) 的自由路，类似的找到 A 进行逆变换，可以得到原来那类路径中的某一条。因此该映射是一一映射。那么定理 4.5 的正确性便呼之欲出了。

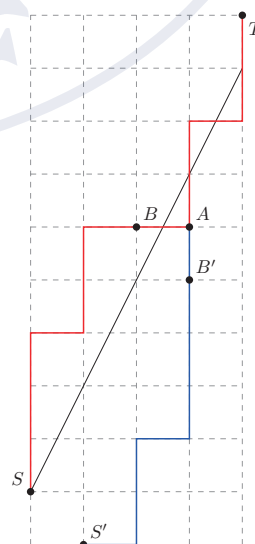


图 3: 旋转法



4.3 更一般的边界

4.3.1 反射容斥的推广

对反射容斥比较理想的推广，需要借助 root system 和 Weyl group 的概念进行刻画。这里只给出一些简化后的、最表层的定义和结论，感兴趣的读者可以阅读 [2]。

在 $\mathbb{R}^d$ 上，令 $\mathcal{H}$ 是一个超平面构成的有限集合， W 是将 $\mathcal{H}$ 中所有元素看成边界，生成的反射群。注意到 W 中的一些反射变换并不沿着 $\mathcal{H}$ 中的超平面进行，那么记 $\mathcal{R}$ 表示 W 中的所有元素对应的超平面的集合。

$\mathcal{R}$ 中的超平面将 $\mathbb{R}^d$ 分割为许多区域， $\mathbb{R}^d - \bigcup_{H \in \mathcal{R}} H$ 中的连通块被称为腔。不难发现，对于任意腔 C ，取 $w \in W$ ，那么 $w(C)$ 两两不同且覆盖了全部的腔。

经过如上的若干定义，我们已经具备了描述更一般的反射容斥的工具。然而，为了使反射容斥适用，步长集合也需要加以约束，使得路径无法在不接触边界的情况下越过边界。为此，我们通过定义 k_H 和 r_H 来实现这一点，其中 $H \in \mathcal{H}$ 。

定理 4.6. 令 C 是反射群 W 对应的一个腔，由超平面集合 $\mathcal{H}$ 生成。取步长集合 $\mathbb{S}$ ，使得对任意 $w \in W$ ， $w(\mathbb{S}) = \mathbb{S}$ ，且对任意 $H \in \mathcal{H}, s \in \mathbb{S}$ ，内积 $\langle s, r_H \rangle$ 的值为 0 或 $\pm k_H$ 。其中 r_H 是一和 H 垂直的非零向量， k_H 是固定常数，它们都只和 H 有关。

对于 C 中任意两个整点 A, E ，满足对任意 $H \in \mathcal{H}$ ， $\langle A, r_H \rangle$ 和 $\langle E, r_H \rangle$ 都是 k_H 的整数倍。从 A 到 E ，恰好 m 步，且始终在 C 内部的格路数量为

$$|L_m(A \rightarrow E; \mathbb{S} \mid \text{inside } C)| = \sum_{w \in W} (\det w) |L_m(w(A) \rightarrow E; \mathbb{S})|$$

下面给出两个具体例子来理解定理 4.6。

考虑在 $\mathbb{Z}^2$ 中，步长集合为 $\{(1, -1), (1, 1), (F, 0)\}$ ，且始终不低于 x 轴的一类格路。当 $F = 1$ 时，对应的格路称为 **Motzkin 路**。当 $F = 2$ 时，对应的格路称为 **Schröder 路**。

推论 4.2. 令 a, c 是整数， b, d 是非负整数，从 (a, b) 到 (c, d) 的 Schröder 路的数量为

$$|L((a, b) \rightarrow (c, d); S = \{(1, -1), (1, 1), (2, 0)\} \mid y \geq 0)| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k} \left(\binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2} - \binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a+b+2)/2} \right)$$

证明. 如果没有 $y \geq 0$ 的限制，可以直接枚举 $(2, 0)$ 走了多少步，而剩下的步长和简单步本质相同，只需将坐标系旋转 45 度。那么我们有

$$|L((a, b) \rightarrow (c, d); S)| = \sum_{k=0}^{(c-a)/2} \binom{c-a-k}{k} \binom{c-a-2k}{(c+d-2k-a-b)/2}$$

应用反射容斥，将问题转化为从 (a, b) 到 (c, d) 的自由 Schröder 路数量，减去从 (a, b) 到 $(c, -d-2)$ 的自由 Schröder 路数量，代入上式即可完成证明。□

上面的推论借助 Schröder 路的例子，揭示了这类格路均适用反射容斥解决，其本质在于较为特殊的 $(F, 0)$ 步长与边界 $y = -1$ 平行，对应了 $\langle s, r_H \rangle = 0$ 的情况。另外，此时可以取 $r_H = (0, 1), k_H = 1$ ，那么所有满足 $\langle s, r_H \rangle = k_H$ 的步长都可以成对（和经过反射的步长）加入进步长集合，即 $(x, 1)$ 和 $(x, -1)$ 。

另一个例子是高维的 ballot problem，即各坐标之间始终单调的简单格路。

推论 4.3. 令 d 是正整数， $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ 和 $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_d)$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 中的两格点，且满足 $\forall 1 \leq i < d, a_i < a_{i+1}, e_i < e_{i+1}$ 。从 $\mathbf{a}$ 走到 $\mathbf{e}$ ，且始终保持 $x_1 < x_2 < \dots < x_d$ 的路径数量为

$$|L(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{e} \mid x_1 < x_2 < \dots < x_d)| = \left(\sum_{i=1}^d (e_i - a_i) \right)! \det_{1 \leq i, j \leq d} \left(\frac{1}{(e_i - a_j)!} \right)$$

证明. 在该情境中， $\mathcal{H} = \{x_i = x_{i+1} \mid 1 \leq i < d\}$ ， $\mathcal{R} = \{x_i = x_j \mid 1 \leq i < j \leq d\}$ ，而 W 对应了全体 $\{1, 2, \dots, d\}$ 的置换，因此根据定理 4.6 我们有

$$\begin{aligned} & |L(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{e} \mid x_1 < x_2 < \dots < x_d)| \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} (\text{sgn } \sigma) |L(\mathbf{a}_\sigma \rightarrow \mathbf{e})| \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} (\text{sgn } \sigma) \frac{\left(\sum_{i=1}^d (e_i - a_i) \right)!}{\prod_{i=1}^d (e_i - a_{\sigma(i)})!} \\ &= \left(\sum_{i=1}^d (e_i - a_i) \right)! \det_{1 \leq i, j \leq d} \left(\frac{1}{(e_i - a_j)!} \right) \end{aligned}$$

□

4.3.2 阶梯型格路计数

至此，本章的所有内容仍局限在边界由若干超平面组成的情况。接下来，我们将考虑一些更一般的情况。尽管此时不一定有简洁的结论，但仍可能存在一些复杂度优秀的算法。

首先考虑阶梯型格路计数。形式化的，给定单调不降的非负整数序列 $a_0, a_1, \dots, a_n$ ，计数从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的简单路径，使得路径上任意点 (x, y) 满足 $y \leq a_x$ 。

最直接的想法是 dp，设 $f_{i,j}$ 表示从 $(0, 0)$ 走到 (i, j) 且不出阶梯的路径数量，转移是 $O(1)$ 的，总复杂度 $O(nm)$ 。

当 m 较大时，另一种思路是容斥。将对路径的阶梯型约束看成 $n+1$ 个障碍点 (i, a_i) ，钦定其中一些需要被经过，每个被钦定的位置贡献一个 -1 的系数。据此不难设计一个状态和转移均为 $O(n)$ 的 dp。转移系数为组合数，还要预处理 $O(m)$ 规模的阶乘及其逆元。总复杂度 $O(n^2 + m)$ 。

这样的容斥思路可扩展性强，可用于障碍点形态任意的格路计数。假设障碍点有 k 个，那么时间复杂度为 $O(k^2 + n + m)$ 。然而在这个情形下，我们还有一个更优秀的做法。

转化一下计数的对象，变为求有多少个非负整数构成的不降序列 $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n = m$ ，满足 $\forall 0 \leq i \leq n, b_i \leq a_i$ 。接下来，我们不对不超过 a 的限制容斥，而是对 b 不降的限制容斥。

钦定若干个位置满足 $b_i > b_{i+1}$ 。考虑一个被钦定的极长连续段 $b_l > b_{l+1} > \dots > b_r (r \neq m)$ ，那么这一段的方案数为 $\binom{a_l}{r-l+1}$ ，也是 dp 最主要的转移系数。而这样的系数在 l 固定时有递推关系，因此总复杂度 $O(n^2)$ 。

最后，如果 n, m 同阶，阶梯型格路计数的一个经典解决办法是分治 FFT。

我们的目标是对最朴素的 dp 进行优化。如图 4 的阶梯型网格，现在我们知道了最下层每个点的 dp 值，想要转移出最右边每个点的 dp 值。

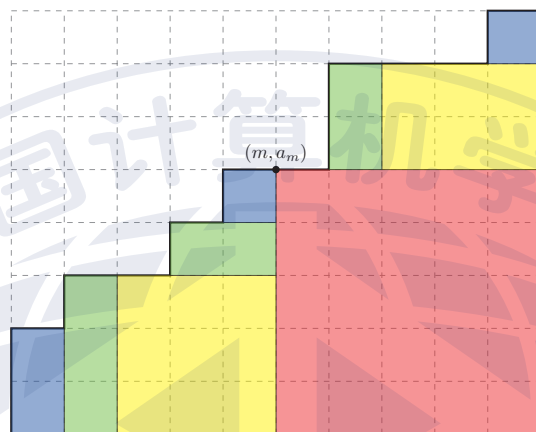


图 4: 阶梯型网格

首先找到横坐标的中点 m ，那么 (m, a_m) 右下角的矩形（红色矩形）完全在阶梯内部。注意到，如果我们求出了红色矩形的左边界和下边界上的 dp 值，只需要一次卷积即可求出右边界和上边界的 dp 值，因为转移系数是组合数。

那么我们先解决 (m, a_m) 左下的子问题，做一次卷积，然后解决 (m, a_m) 右上的子问题，就可以解决原问题了。将这个过程不断递归下去，也就是分治，便得到了完整的算法。

分析一下这个做法的时间复杂度。首先，由于我们每次都是从 midpoint 将问题分开，因此只会进行 $O(\log n)$ 层。每一次卷积的复杂度和对应矩形周长有关，假设周长为 L ，那么使用 FFT 做卷积的复杂度为 $O(L \log L)$ 。注意到每一层的所有矩形（图中同色即同层）边长之和不超过 $2(n + m)$ 。因此当 n, m 同阶时，总复杂度为 $O(n \log^2 n)$ 。

4.3.3 障碍点任意

如果障碍点的形态分布没有任何约束，前文的若干做法将不再适用。仅剩的手段便是利用容斥的思想，钦定一些障碍点必须经过，然后进行 dp 。

重剑无锋，这样的做法不依赖于障碍点的性质，具有很强的扩展性。甚至在一些障碍点也不固定的情形下，仍可以做到优秀的复杂度。



5 特征限制

本章将讨论三个常见的路径特征，计数这些特征值固定时的格路数量，或是格路的特征值之和。在此基础上还可能涉及不相交格路或边界限制。

5.1 与直线的交点

给定一条直线 l ，那么这条直线会经过若干整点，设这些整点构成的集合为 $\mathcal{L}$ 。对于一条路径 $P = (P_0, P_1, \dots, P_l)$ ，计算 $\sum_{i=0}^l [P_i \in \mathcal{L}]$ ，称为 P 与该直线的交点数量，记为 $I_l(P)$ ，当 l 的含义明确且唯一时会将其省略。

5.1.1 斜率为 1

当直线斜率为 1 时，我们想计算与其相交固定次数的格路数量，由以下定理给出：

定理 5.1. 令 n, m, b 是三个非负整数，满足 $m \geq n + b$ ， t 是不超过 n 的正整数。计数从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的路径 P ，满足 P 与 $y = x + b$ 恰好相交 t 次。

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid I(P) = t)| = 2^{t-1} \binom{n+m-t+1}{m} - 2^t \binom{n+m-t}{m}$$

证明. 不难发现我们只需证明

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid I(P) \geq t)| = 2^{t-1} \binom{n+m-t+1}{m}$$

对于一条路径 P 满足 $I(P) \geq t$ ，我们找到 P 和 $y = x + b$ 的前 t 个交点 $A_1, A_2, \dots, A_t$ 。交点之间的路径全部在 $y = x + b$ 一侧，由于有反射构造的双射，我们只需求 A_t 前均满足 $y \leq x + b$ 的路径数量，再乘上 2^{t-1} 即可。

此时显然有，对任意 $1 \leq i < t$ ， A_i 后的第一步是 $(1, 0)$ 。我们将这 $t-1$ 步 $(1, 0)$ 从 P 中删去，其余每步依次拼接并保持起点不动，得到一条新的路径，其起点和终点分别为 $(0, 0)$ 和 $(n-t+1, m)$ 。如图 5 所示。

于是我们构造了一个待求路径集到 $L((0, 0) \rightarrow (n-t+1, m))$ 的映射。可以发现这是双射，只需依次找到 $A_1, A_2, \dots, A_t$ 并将删去的 $(1, 0)$ 换元即可。由此不难得到待证等式。□

定理 5.1 有趣的一点在于，结果和 b 无关。回顾 b 的定义，它的限制只有 $0 \leq b < m - n$ 。也就是说，夹在 $(0, 0)$ 和 (n, m) 之间的直线，他们都有相同的答案。事实上，我们也可以通过折线法构造双射来证明这一点，此处不再赘述。

还有一个小问题，如果 $m < n + b$ ，只需通过折线法将终点反射至 $y = x + b$ 上方，便转化为了定理 5.1 适用的情形。

有了如上的结论，我们还可以计数所有路径和 $y = x + b$ 的交点数量之和。

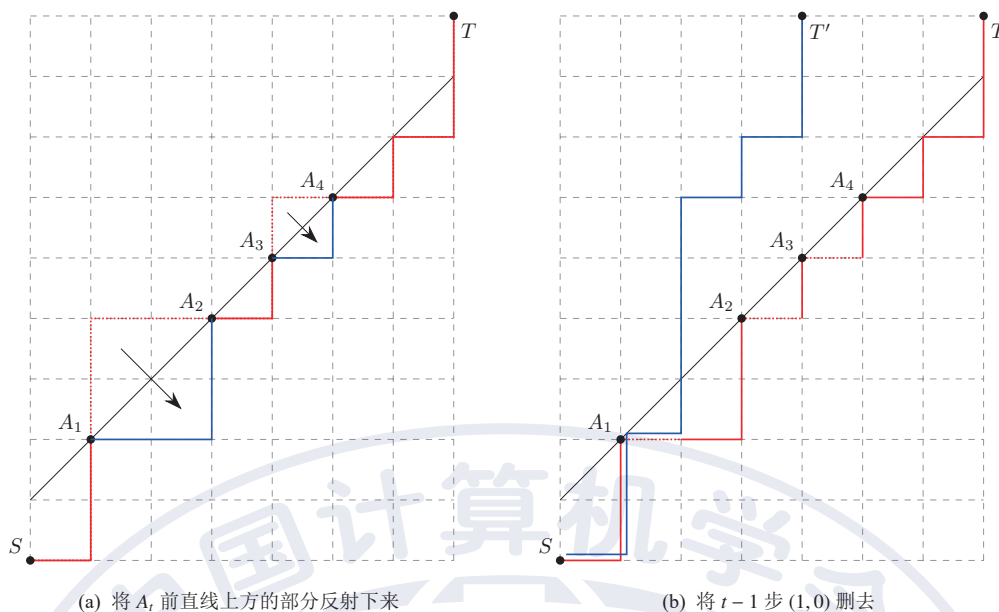


图 5: 双射的构造, $t=4$

推论 5.1. 令 n, m, b 是三个非负整数, 满足 $m \geq n + b$. 从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的所有路径与 $y = x + b$ 的交点个数之和为

$$GF(L((0, 0) \rightarrow (n, m); I(P))) = \sum_{i=0}^n 2^i \binom{n+m-i}{m} = \sum_{i=m+1}^{n+m+1} \binom{n+m+1}{i}$$

第一个等号显然, 第二个等号只需要将 2^i 二项式展开即可。可以发现, 最终结果的形式是一个经典问题——组合数前缀和。

5.1.2 斜率为正整数

定理 5.2. 令 n, m, b 是三个非负整数, k 是正整数, 满足 $m \geq kn + b$, t 是不超过 n 的正整数。计数从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的路径 P , 满足 P 与 $y = kx + b$ 恰好相交 t 次。

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid I(P) = t)| = (k+1)^{t-1} \binom{n+m-t+1}{m} - (k+1)^t \binom{n+m-t}{m}$$

证明. 我们仍然只需证明

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid I(P) \geq t)| = (k+1)^{t-1} \binom{n+m-t+1}{m}$$

然而, 当我们想沿用之前的方法时, 无法简单的将两个整交点之间的路径, 分为在直线上下的两部分。因为路径有可能和直线在非格点处相交。



如果某个整交点 A_i 之后的第一步是 $(1, 0)$, 那么下一次相交一定在整点处, 也就是 A_{i+1} 。这提示我们, 不高于 $y = kx + b$ 的情形是好算的, 接下来我们通过旋转法将其它的情况转化过来。

观察相邻的两个整交点 A_i, A_{i+1} 之间的部分。假设 A_i 后的第一步是 $(0, 1)$, 找到路径上 A_i 之后第一个满足 $y \leq kx + b$ 的格点 A' , 那么存在唯一的 $0 \leq b' < k$ 使得 A' 在 $y = kx + b - b'$ 上, 我们将这样的路径按照 b' 分为 k 类。

任取这 k 类中的某一类, 对其中所有路径进行操作: 将 $A_i A'$ 旋转 180° 。接下来我们说明这个操作构造了, 这一类路径和不高于直线的路径之间的双射。

一方面, 如果对操作后的路径寻找 A_i 之后第一个不低于 $y = kx + b - b'$ 的点, 那么会找到 A' ; 另一方面, 任意一条不高于直线的子路径, 将第一个不低于 $y = kx + b - b'$ 的点看作 A' , 容易证明对其进行逆变换后, 会让 A_i 和 A' 之间的路径高于 $y = kx + b$, 进而对应了原来那类路径中的一条。至此我们构造了所需的双射。

现在我们可以将 A_i 和 A_{i+1} 之间的方案数, 看成不高于 $y = kx + b$ 的方案数的 $k + 1$ 倍。因此最终只需要计数 A_i 之前均不高于 $y = kx + b$ 的路径数量, 只需对每个 $1 \leq i < t$ 删去 A_i 后第一步 $(1, 0)$, 双射到另一些自由路上。 $\square$

推论 5.2. 令 n, m, b 是三个非负整数, k 是正整数, 满足 $m \geq kn + b$ 。从 $(0, 0)$ 到 (n, m) 的所有路径与 $y = kx + b$ 的交点个数之和为

$$GF(L((0, 0) \rightarrow (n, m); I(P))) = \sum_{i=0}^n (k+1)^i \binom{n+m-i}{m} = \sum_{i=m+1}^{n+m+1} k^{i-m-1} \binom{n+m+1}{i}$$

5.2 拐点

对于一条从 (a, b) 到 (c, d) 的简单格路 P , 每走一步 $(1, 0)$ 我们就写一个 E, 每走一步 $(0, 1)$ 我们就写一个 N, 最终会得到恰好有 $c - a$ 个 E 和 $d - b$ 个 N 的字符串。

考虑这个字符串中的一个 EN 子串, 在路径上对应的是连续的 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 。我们称这两步之间的点, 也就是前一步的终点、后一步的起点, 是一个 EN 拐点。记一条路径 P 的 EN 拐点个数为 $EN(P)$ 。同样我们可以定义 NE 拐点与 $NE(P)$ 。

本章研究的是, 在某种拐点的数量一定的条件下, 若干经典问题的再探讨。

5.2.1 无限制

首先考虑没有限制的情况: 从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 计数某种拐点的数量固定的格路。

为了更好的刻画拐点的形态, 我们引入拐点信息的概念。

定义 5.1 (拐点信息). 令路径 P 有 ℓ 个 EN 拐点, 依次设为 $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_\ell, q_\ell)$, 那么长度均为 ℓ 的序列对 (p, q) 称为 P 的 EN 拐点信息。同理可定义 NE 拐点信息。

可以看到拐点信息实质上是, 将所有拐点的两维坐标分别组成了两个序列。由于本节讨论的都是简单格路, 因此无论是对 EN 拐点信息还是 NE 拐点信息, p 和 q 均单调递增。进一步, EN 拐点信息具有以下约束:

$$\begin{aligned} 1 \leq p_1 & p_2 \dots p_\ell \leq n \\ 0 \leq q_1 & q_2 \dots q_\ell < m \end{aligned}$$

另一方面, 任意一组满足条件的序列对 (p, q) 都对应了一条路径。那么我们可以直接对满足条件的 (p, q) 计数。如果限制的是 NE 拐点, 也有相同的结果。

定理 5.3. 令 n, m, ℓ 是非负整数。从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 有 ℓ 个 EN 拐点或有 ℓ 个 NE 拐点的格路数量为

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid \text{EN}(P) = \ell)| = |L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid \text{NE}(P) = \ell)| = \binom{n}{\ell} \binom{m}{\ell}$$

5.2.2 斜率为 1 的边界

添加一个斜率为 1 的直线的边界限制, 仍然固定 EN 拐点或 NE 拐点计数。

我们已经知道, 反射法是解决此类问题的利器。接下来会直接对拐点信息进行类似的变换, 实质上也是将路径的反射描述为了更直观的形式。

先考虑只有一个边界, 固定 EN 拐点的版本: 计数从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终不低于 $y = x + b$ 且有 ℓ 个 EN 拐点数量的格路。

仍然考虑容斥, 那么限制转化为路径上存在过低于 $y = x + b$ 的点。可以发现, 路径 P 满足这个条件等价于 P 存在一个 EN 拐点低于 $y = x + b$ 。

记最后一个低于 $y = x + b$ 的拐点编号为 I 。考虑将拐点信息双射到如下序列对。

$$\begin{aligned} -b \leq q_1 - b & \dots q_I - b & p_I & p_{I+1} & \dots p_\ell & \leq n \\ b < & p_1 + b & \dots p_{I-1} + b & q_{I+1} & \dots q_\ell & < m \end{aligned}$$

由于假设保证了 $q_I < p_I + b < p_{I+1} + b \leq q_{I+1}$, 不难验证这两个序列各自都是单调递增的。另外有 $(p_I, p_{I-1} + b)$ 低于 $y = x + b$, 而 I 之后的信息都没有变化, 因此我们仍能在新序列对上, 从后往前定位到 I , 将其映射回来。特别的, 如果找不到这样的位置, $I = 1$ 。也就是说, 所求与满足下述约束条件的单增序列对 $(\bar{p}, \bar{q})$ 双射。

$$\begin{aligned} -b \leq \bar{p}_0 & \bar{p}_1 & \bar{p}_2 & \dots & \bar{p}_\ell & \leq n \\ b < & & \bar{q}_2 & \dots & \bar{q}_\ell & < m \end{aligned}$$

定理 5.4. 令 n, m, ℓ 是非负整数, b 是非正整数, 满足 $m \geq n + b$ 。从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终不低于 $y = x + b$ 且有 ℓ 个 EN 拐点的格路数量为

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid y \geq x + b, \text{EN}(P) = \ell)| = \binom{n}{\ell} \binom{m}{\ell} - \binom{n+b+1}{\ell+1} \binom{m-b-1}{\ell-1}$$

类似的, 也可以对 NE 拐点数量进行限制。

定理 5.5. 令 n, m, ℓ 是非负整数, b 是非正整数, 满足 $m \geq n + b$. 从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终不低于 $y = x + b$ 且有 ℓ 个 NE 拐点的格路数量为

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid y \geq x + b, \text{NE}(P) = \ell)| = \binom{n}{\ell} \binom{m}{\ell} - \binom{n + b - 1}{\ell} \binom{m - b + 1}{\ell}$$

如果变为双边界限制, 只需类似的将反射容斥的过程应用于拐点信息上即可:

定理 5.6. 令 n, m, l, r, ℓ 是整数, 满足 $l \leq 0 \leq r, n + l \leq m \leq n + r$. 从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终夹在 $y = x + l$ 和 $y = x + r$ 之间, 且恰有 ℓ 个 EN 拐点的格路数量为

$$\begin{aligned} & |L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid x + l \leq y \leq x + r, \text{EN}(\cdot) = \ell)| \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\binom{m - k(r - l)}{\ell + k} \binom{n + k(r - l)}{\ell - k} - \binom{m - k(r - l) - r - 1}{\ell + k} \binom{n + k(r - l) + r + 1}{\ell - k} \right) \end{aligned}$$

5.2.3 斜率为正整数的边界

进一步, 如果斜率不为 1, 事情将变得复杂起来。在这里, 我们只讨论一种简单的情况: 计数从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终不低于 $y = \mu x$ 且有 ℓ 个 EN 拐点数量固定的格路。

经过了上一章中旋转法的讨论, 我们可以预见拐点信息的结构, 很有可能也是分为 μ 类, 分别构造双射。

对于一条不合法的路径 P , 显然其必定存在一个低于 $y = \mu x$ 的拐点, 记第一个这样的拐点编号为 I 。显然存在唯一的 $X \in \mathbb{Z}$ 和 $r \in [1, \mu] \cap \mathbb{Z}$, 满足 $q_I = \mu X - r$, 那么 I 也是第一个满足 $y \leq \mu x - r$ 的点。我们将这些不合法的 P 按照对应的 r 分为 μ 类, 实际上也就是按照 $q_I \bmod \mu$ 分类。

接下来对拐点信息进行变换, 也就是双射到如下的序列对。

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 \leq & X - p_{I-1} & \dots & X - p_I & X & p_{I+1} & \dots & p_{\ell+1} & \leq n \\ 1 \leq & q_I - q_{I-1} & \dots & q_I - q_I & q_{I+1} & \dots & q_{\ell} & & < m \end{array}$$

这个映射的一个特点是将 I 之前的部分进行了一定程度的“翻转”。这并不是巧合, 而是旋转法中路径旋转 180 度产生的效果。由于保证了 $\mu p_{I-1} - r < q_{I-1} < q_I = \mu X - r \leq \mu p_I - r$, 可以验证这两个序列满足限制并且单调递增。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \leq & \bar{p}_1 & \dots & \bar{p}_{\ell-1} & \bar{p}_{\ell} & \bar{p}_{\ell+1} & \leq n \\ 1 \leq & \bar{q}_1 & \dots & \bar{q}_{\ell-1} & & & < m \end{array}$$

当我们想换元拐点信息时, 只需找到第一个 I 满足 $(\bar{p}_I, \bar{q}_I)$ 在 $y = \mu x - r$ 上方。不难验证, 这样找到的 I 和上述映射是同一个, 那么只需要做逆变换即可。

定理 5.7. 令 n, m, ℓ 是非负整数, μ 是正整数, 满足 $m \geq \mu n$. 从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终不低于 $y = \mu x$ 且恰有 ℓ 个 EN 拐点的格路数量为

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid y \geq \mu x, \text{EN}(P) = \ell)| = \binom{n}{\ell} \binom{m}{\ell} - \mu \binom{n+1}{\ell+1} \binom{m-1}{\ell-1}$$

类似的,也可以对 NE 拐点数量进行限制。

定理 5.8. 令 n, m, ℓ 是非负整数, μ 是正整数, 满足 $m \geq \mu n$ 。从 $(0, 0)$ 到 (n, m) , 始终不低于 $y = \mu x$ 且恰有 ℓ 个 NE 拐点的格路数量为

$$|L((0, 0) \rightarrow (n, m) \mid y \geq \mu x, \text{NE}(P) = \ell)| = \binom{n-1}{\ell-1} \binom{m+1}{\ell} - \mu \binom{n}{\ell} \binom{m}{\ell-1}$$

5.2.4 不相交格路

定理 5.9. 令 n, ℓ 是非负整数, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n), \mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ 是格点序列, 其中 $A_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}), E_i = (e_1^{(i)}, e_2^{(i)})$, 满足 a_1, e_1 单增, a_2, e_2 单减。那么从 $\mathbf{A}$ 到 $\mathbf{E}$ 的不交路径组, 满足共有 ℓ 个 EN 拐点的方案数为

$$\begin{aligned} & |L(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{E} \mid \text{non-intersecting}, \text{EN}(\mathbf{P}) = \ell)| \\ &= \sum_{\ell_1 + \dots + \ell_n = \ell} \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\binom{e_1^{(j)} - a_1^{(i)} - i + j}{\ell_i} \binom{e_2^{(j)} - a_2^{(i)} + i - j}{\ell_i + i - j} \right) \end{aligned}$$

其中对不交路径组 $\mathbf{P}$, $\text{EN}(\mathbf{P})$ 表示 $\sum_{P \in \mathbf{P}} \text{EN}(P)$ 。

甚至还可以在有边界限制的情况下, 求固定拐点总数的不相交路径的方案数。限于篇幅, 此处不再深入讨论。

5.3 area(P) 与 maj(P)

5.3.1 q -模拟

一个定理、等式或者表达式的 q -模拟是指, 引入形式元 q , 以适当的方式将原本的内容替换为和 q 有关的表达式, 使得当 $q \rightarrow 1$ 时通常会得到原来的定理、等式或者表达式。它是一类公式的拓展方法, 也可以研究组合统计量的分布。

本节的内容和 q -模拟相关性较高, 这里先给出一些基本的定义和结论。

定义 5.2 (q -整数、 q -阶乘、 q -组合数)。对非负整数 $m \leq n$,

$$[n]_q = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

称为 q -整数;

$$[n]_q! = \prod_{i=1}^n [i]_q$$

称为 q -阶乘;

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[m]_q! [n-m]_q!}$$

称为 q -组合数。

命题 5.1 (q -帕斯卡恒等式、 q -二项式定理). 对正整数 $m \leq n$,

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = q^{n-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q$$

称为 q -帕斯卡恒等式;

$$\prod_{i=0}^{n-1} (1 + q^i x) = \sum_{i=0}^n q^{\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q x^i$$

称为 q -二项式定理。

5.3.2 $\text{area}(P)$

考虑一条从 $(0,0)$ 到 (n,m) 的格路 P , 记它与 $x=n, y=0$ 围成的区域面积为 $\text{area}(P)$, 我们希望将 $\text{area}(P)$ 作为特征进行计数。

定理 5.10. 令 n, m 是非负整数, 从 $(0,0)$ 到 (n,m) 的格路, 以 $\text{area}(P)$ 作为特征的 q -counting 为

$$GF(L((0,0) \rightarrow (n,m)); q^{\text{area}(P)}) = \begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix}_q$$

证明. 显然该式在 $nm=0$ 成立, 考虑归纳。假如该式对 $n < N$ 或 $n \leq N, m < M$ 成立, 下证该式对 $n=N, m=M$ 也成立。为了方便, 记 $\text{area}(n,m) = GF(L((0,0) \rightarrow (n,m)); q^{\text{area}(P)})$ 。根据 q -帕斯卡恒等式, 我们有

$$\begin{aligned} \text{area}(n,m) &= q^m \text{area}(n-1, m) + \text{area}(n, m-1) \\ &= q^m \begin{bmatrix} n+m-1 \\ m \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n+m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q \\ &= \begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

□

5.3.3 $\text{maj}(P)$

另一个相关的特征是 $\text{maj}(P)$, 其含义为 P 的所有 EN 拐点在 P 中的下标之和。

$\text{maj}(P)$ 与 $\text{area}(P)$ 的相关性在以下命题中体现:

命题 5.2. 对非负整数 $m \leq n$,

$$GF(L((0,0) \rightarrow (n,m)); q^{\text{area}(P)}) = GF(L((0,0) \rightarrow (n,m)); q^{\text{maj}(P)})$$

这意味着在自由格路中, 以 $\text{area}(P)$ 和以 $\text{maj}(P)$ 作为特征的 q -counting 的结果是相同的。接下来让我们增加一个边界:

定理 5.11. 令 n, m 是非负整数, 从 $(0,0)$ 到 (n,m) 的格路, 始终不低于 $y = x$, 以 $\text{maj}(P)$ 作为特征的 q -counting 为

$$GF(L((0,0) \rightarrow (n,m) \mid y \geq x); q^{\text{maj}(\cdot)}) = \left[\begin{matrix} n+m \\ n \end{matrix} \right]_q - q \left[\begin{matrix} n+m \\ n-1 \end{matrix} \right]_q$$

证明. 由于我们已经知道自由路的答案, 只需将所有经过 $y = x - 1$ 的路径的贡献减掉。

考虑构造一个双射 ϕ , 将这样的所有不合法路径 P 映射到从 $(0,0)$ 到 $(n-1, m+1)$ 的自由路, 满足 $\text{maj}(P) = \text{maj}(\phi(P)) + 1$ 。显然, 如果这样的 ϕ 存在, 那么立刻证明了该定理。

ϕ 的构造如下: 找到 P 中 $y - x$ 最小的位置 A , 如有多个选最靠前的一个。记 A 的前一个位置为 B , 显然 BA 步长为 $(1,0)$ 。那么将这一步变为 $(0,1)$, 便得到了 $\phi(P)$ 。

可以发现, 如果我们寻找 $\phi(P)$ 中 $y - x$ 最小的位置, 如有多个选最靠后的一个, 那么将会找到 B 。如此一来所有满足条件的自由路都存在唯一的原像, 因此 ϕ 是双射。

还需验证 $\text{maj}(P) = \text{maj}(\phi(P)) + 1$ 总是成立。首先 A 显然是一个 EN 拐点, 若 $B = (0,0)$, ϕ 恰好删掉了一个下标为 1 的 EN 拐点, 显然是正确的; 否则, B 的前一步也是 $(1,0)$, 那么 A 将不再是 EN 拐点而 B 将成为 EN 拐点, 二者下标刚好差 1。 $\square$

值得一提的是, 若在定理 5.11 中满足 $n = m$, 等号右边化为 $\frac{1}{[n+1]_q} \left[\begin{matrix} 2n \\ n \end{matrix} \right]_q$, 称为 q -卡特兰数。

6 总结

本文既包含算法竞赛中数次考察、但没有得到广泛普及的知识点, 如 LGV 引理、广义 Dyck 路、与直线的交点限制; 还包含一些在算法竞赛中少见, 但是非常适合放入的结论与算法, 如起点终点不固定的不相交路径、高维 ballot problem、拐点限制。

总的来说, 本文不算全面, 只是泛泛的介绍了格路计数中较为初等的工作。于其中, 我们也可以窥见若干内容的共性。例如 LGV 引理和反射容斥, 都需要构造双射或者对合来抵消一些贡献, 推论 4.3 正同时可以被两种方法解决。

仅以本文抛砖引玉, 希望读者可以对格路计数作进一步的思考和研究。期待有更多格路计数相关的问题在算法竞赛中出现。



致谢

感谢中国计算机学会提供学习和交流的平台。

感谢北京市十一学校的汪星明老师和韩思瑶老师的关心与教导。

感谢家人的关心和支持。

感谢林卓铖、武林、周康阳等同学与我交流讨论。

参考文献

- [1] Masao Ishikawa and Masato Wakayama. Minor summation formulas of pfaffians, survey and a new identity. Adv. Stud. Pure Math, 28:133–142, 2000.
- [2] Ira M Gessel and Doron Zeilberger. Random walk in a weyl chamber. Proceedings of the American Mathematical Society, 115(1):27–31, 1992.
- [3] Miklós Bóna. Handbook of enumerative combinatorics, volume 87. CRC Press, 2015.
- [4] Ian P Goulden and Luis G Serrano. Maintaining the spirit of the reflection principle when the boundary has arbitrary integer slope. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 104(2):317–326, 2003.
- [5] Johannes Furlinger and Josef Hofbauer. q-catalan numbers. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 40(2):248–264, 1985.
- [6] John R Stembridge. Nonintersecting paths, pfaffians, and plane partitions. 1990.
- [7] Christian Krattenthaler. The enumeration of lattice paths with respect to their number of turns, 1997.
- [8] Yukiko Fukukawa. Counting generalized dyck paths. arXiv: Combinatorics, 2013.
- [9] George E Andrews, Christian Krattenthaler, Alan Krinik, et al. Lattice Path Combinatorics and Applications, volume 58. Springer, 2019.
- [10] Katherine Humphreys. A history and a survey of lattice path enumeration. Journal of statistical planning and inference, 140(8):2237–2254, 2010.